Seminarium den 7/3.

1. Antag att $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ är ett heltals polynom, och a, b, c, d är fyra olika heltal sådana att $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 5$. Visa att det inte finns något heltal k så att $p(k) = 8$.

Bevis. Låt $f(x) = p(x) - 5$. Då $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)h(x)$ för något heltals polynom $h(x)$ och $f(k) = 3$ för något heltal (om vi antar att det kan finns ett sådant heltal k så att $p(k) = 8$).
Vidare har vi $3 = (k-a)(k-b)(k-c)(k-d)h(k)$
Men 3 kan bara faktor av mest tre olika heltal, $-3, 1, -1$ exempelvis. En motsägelse eftersom HL har fyra olike faktorer.

— x —

2. Visa att om $\sqrt[3]{a}$ är rationellt så är $\sqrt[3]{a}$ heltal.

Bevis. Låt $\sqrt[3]{a} = \frac{p}{q}$ med $sgd(p,q) = 1$. Vi ska visa att $q = 1$.
Vi har $a = p^3/q^3 \iff aq^3 = p^3$. (i)
Om $q > 1$ och $b \mid q$, för något primtal b, (1)

Då måste vi få $b \mid p$ från (i), men vi vet $sgd(p,q) = 1$
Motsägelsen visar att p måste vara 1.

— x —

4. Låt a, b, c vara positiva parametrar.
Lös ekvationen
$$\sqrt{a+bx} + \sqrt{b+cx} + \sqrt{c+ax} = \sqrt{b-ax} + \sqrt{c-bx} + \sqrt{a-cx}.$$

Lösning: Insättningen av $x = 0$ visar att $x = 0$ är en lösning. Det är också den enda lösningen eftersom VL är en växande funktion av x medan HL är en avtagande funktion.

— x —

5. Finn alla ordnade par av (x, y) för vilka
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+y^7$$
$$(1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1+x^7$$

Lösning. Vi delar lösningen i några fall.
(a) $xy = 0$: Då $x = y = 0$ är en lösning
(b) $xy < 0$: Eftersom x, y är symmetriska kan vi anta $x > 0 > y \Rightarrow (1+x)(1+x^2)(1+x^4) > 1$ & $1+y^7 < 1$
$\Rightarrow$ inga lösningar
(c) $x > 0, y > 0, x \neq y$: Utan inskränkning antar vi (2

$x>y>0$. Då gäller

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) > 1+x^7 > 1+y^7$$

$\Rightarrow$ inga lösningar.

(d) $x<0,\ y<0,\ x\neq y$: Antag $x<y<0$. Vi har

$$(1-x)\underbrace{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}_{=1+y^7} = 1-x^8 \iff 1-x^8 = 1-x+y^7-xy^7$$

$$1-y^8 = 1-y+x^7-x^7y$$

PSS. för andra ekvationen:

$$\Rightarrow \underbrace{x^8-y^8}_{>0} = \underbrace{\overbrace{(x-y)}^{<0} + \overbrace{(x^7-y^7)}^{<0} \overbrace{-xy}^{\leq 0}\overbrace{(x^6-y^6)}^{>0}}_{<0}$$

Ty $x<y<0$

Så det finns inte lösning.

(e) $x=y$: Då $1-x^8 = 1-x+x^7-x^8$

$\iff x^7-x=0 \iff x(x^6-1)=0$

$\iff x(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)=0$

Vi får $x=0,\ x=-1,\ x=1$.

Så $(x,y)=(0,0)$, $(x,y)=(-1,-1)$

är lösningar.

6. För vilka positiva tal a,b,c gäller

$$\begin{cases} abc=1 \\ \dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1}\leq 1 \end{cases} ?$$

Svar. för alla $a,b,c>0$ ~~sådana~~ $abc=1$ gäller olikhet.

Alternativ 1. Låt $x=a+b,\ y=b+c,\ z=c+a$. Då blir olikheten

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\leq 1$$

$\iff x+y+z+2 \leq xyz$

$\iff 2(a+b+c)+2 \leq (a+b)(b+c)(c+a)$

$\iff 2(a+b+c) \leq a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$

AM-GM ger $(a^2b+a^2c+1)\geq 3\sqrt[3]{a^4bc}=3a$

$(b^2c+b^2a+1)\geq 3b$

$(c^2a+c^2b+1)\geq 3c$

Det innebär att vi behöver bara visa att

$2(a+b+c)+3 \leq 3(a+b+c) \iff 3\leq a+b+c$

vilket är sant enligt AM-GM.

Alternativ 2. Använd $a=a_1^3,\ b=b_1^3,\ c=c_1^3 \Rightarrow a_1b_1c_1=1$

Notera att $a_1^3+b_1^3-a_1^2b_1-a_1b_1^2=(a_1-b_1)(a_1^2-b_1^2)\geq 0$

$\Rightarrow a_1^3+b_1^3 \geq a_1b_1(a_1+b_1)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a+b+1}\leq \dfrac{c_1}{a_1+b_1+c_1}$

P.S.S $\dfrac{1}{b+c+1}\leq \dfrac{a_1}{a_1+b_1+c_1}$, $\dfrac{1}{c+a+1}\leq \dfrac{b_1}{a_1+b_1+c_1}$

ledvis addition ger ~~det~~ önskade olikheten.