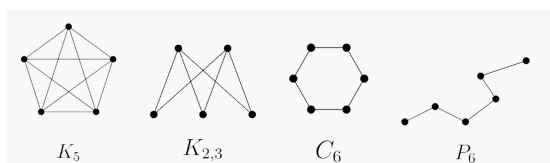


Diskussion i grafteori

Några namn på grafer:

- K_n : en komplett graf som är en graf där det finns en kant mellan varje par av hörn och där antalet hörn är n stycken
- $K_{m,n}$: en bipartit graf (bipartite graph på engelska) har två delmängder av m respektive n hörn så att alla kanter går från den ena mängden till den andra.
- P_n : en stig med n hörn, dvs en vandring som inte passerar samma hörn flera gånger.
- C_n : en cykel med n hörn, dvs. en sluten stig, det vill säga börjar och slutar i samma hörn.

Exempel:



Problem 2. Bland en grupp på 5 personer, är det möjligt för alla att vara vänner med exakt 2 av personerna i gruppen? Vad sägs om 3 av personerna i gruppen?

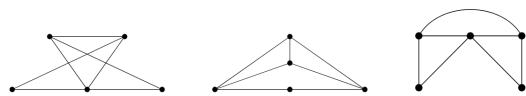
Det är möjligt för alla att vara vän med exakt två personer. Man kan ordna de 5 personerna i en cirkel och säga att alla är vänner med de två personerna på vardera sidan om dem (så att man får grafen C_5). Det är dock inte möjligt för alla att vara vänner med 3 personer. Det skulle leda till en graf med ett udda antal udda graders hörn, vilket är omöjligt eftersom summan av graderna måste vara jämn.

Problem 3. För var och en av följande, försök att ge två olika grafer med de givna egenskaperna, eller förklara varför det är omöjligt att göra det.

- (a) Två olika grafer med 8 hörn alla av grad 2.
- (b) Två olika grafer med 5 hörn alla av grad 4.
- (c) Två olika grafer med 5 hörn alla av grad 3.

(a) Det är omöjligt om vi kräver att graferna är sammanhängande. Om inte, kan vi ta C_8 som en graf och två kopior av C_4 som den andra. (b) Inte möjligt. Om vi har en graf med 5 hörn och alla med grad 4, måste varje hörn ligga intill varannat hörn. Detta är graf K_5 . (c) Detta är inte möjligt. Det finns faktiskt inte ens en graf med denna egenskap (en sådan graf skulle ha $5 \cdot 3/2 = 7,5$ kanter).

Problem 4 Vilka (om någon) av graferna nedan är desamma? Vilka är olika? Förklara. Vilken av graferna innehåller Eulerstig eller kretsar? Vilka av graferna är planära?



Den första och tredje grafen är samma (försök att dra runt hörn för att få bilderna att matcha), men den mittersta grafen är annorlunda (vilket du till exempel kan se genom att notera att den mittersta grafen bara har ett hörn av grad 2, medan de andra har två hörn).

Den första (och den tredje) grafen innehåller en Eulerstig. Alla grafer är planära.

Problem 5. (i) Rita en graf som har en Euler-krets men inte är planär.

(ii) Rita en graf som inte har en Eulerstig och inte heller är planär.

(i) K_5 (ii) $K_{3,3}$.

Problem 6. Antag att G är en graf med n hörn, var och en med grad 5.

(a) För vilka värden på n är detta meningsfullt?

(b) För vilka värden på n har grafen en Eulerstig?

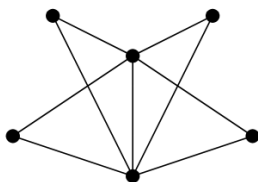
(c) Vilket är det minsta värdet på n för vilken kan grafen vara planär?

(a) Endast om $n \geq 6$ och är jämnt

(b). Ingen

(c) 12. Sådan graf skulle ha $5n/2$ kanter. Om grafen är planär gäller att $n - 5n/2 + f = 2$ så $f = (4 + 3n)/2$. Då måste det vara att $3f \leq 2e$ eftersom grafen är enkel. Nu har vi $3((4 + 3n)/2) \leq 5n$, vilket ger $n \geq 12$.

Problem 8. Betrakta grafen



(a) Har grafen en Eulerstig eller krets? Förklara.

(b) Är grafen plan? Förklara.

(c) Är grafen bipartite? Komplet? Komplet bipartie?

(a) Grafen har en Eulerstig men inget Eulerkrets. Det finns exakt två hörn med udda grader.

(b) Grafen är planär.

(c) Grafen är inte bipartite (det finns en udda cykel), så inte heller komplette biipartie.