

Problem 2. Visa att $\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k} = \frac{1}{3}(2^{3n} + 2(-1)^n)$.

Idén är samma som vi bevisar $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, då vi applicerar binomialsatsen på $(x+y)^n$

med $x = y = 1$ dvs en rot till $x^2 = 1$. Betrakta nu $x^3 - 1 = 0$. Det finns tre rötter till ekvationen $1, \xi, \bar{\xi}$. Då har vi $\xi + \bar{\xi} = -1$, $\xi\bar{\xi} = 1$ enligt Viètes formel. Men $\xi^2 + \xi + 1 = 0$ och $\bar{\xi}^2 + \bar{\xi} + 1 = 0$. Så vi har $\xi^2 = \bar{\xi}$ och $\bar{\xi}^2 = \xi$. Applicera binomialsatsen för $(x+y)^{3n}$ med $x = 1, y = 1$, och $x = 1, y = \xi$, respektive $x = 1, y = \bar{\xi}$ får vi

$$2^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k}, \quad (1 + \xi)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \xi^k, \quad (1 + \bar{\xi})^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \bar{\xi}^k.$$

Ledvisaddition, tillsammans med relationerna om $\xi, \bar{\xi}$ ovan, ger

$$2^{3n} + (1 + \xi)^{3n} + (1 + \bar{\xi})^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (1 + \xi^k + \bar{\xi}^k).$$

Beräkna $1 + \xi^k + \bar{\xi}^k$: Notera att $\xi^3 = 1$ och $\bar{\xi}^3 = 1$. Så

$$1 + \xi^k + \bar{\xi}^k = \begin{cases} 1 + 1^{3m} + 1^{3m} = 3, & k = 3m \\ 1 + \xi^{3m}\xi + \bar{\xi}^{3m}\bar{\xi} = 1 + \xi + \bar{\xi} = 0, & k = 3m + 1 \\ 1 + \xi^{3m}\xi^2 + \bar{\xi}^{3m}\bar{\xi}^2 = 1 + \xi^2 + \bar{\xi}^2 = 1 + \bar{\xi} + \xi = 0, & k = 3m + 2. \end{cases}$$

Summan blir nu

$$\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (1 + \xi^k + \bar{\xi}^k) = \sum_{k=0}^{3n} 3 \binom{3n}{3k},$$

vilket ger

$$\sum_{k=0}^{3n} 3 \binom{3n}{3k} = 2^{3n} + (1 + \xi)^{3n} + (1 + \bar{\xi})^{3n}.$$

Vidare ger $1 + \xi = -\bar{\xi}$ och $\bar{\xi}^3 = 1$ $(1 + \xi)^3 = -1$. Så $(1 + \xi)^6 = 1$. På samma sätt har vi $(1 + \bar{\xi})^3 = -1$, $(1 + \bar{\xi})^6 = 1$. Slutligen

$$\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{3k} = \frac{1}{3}(2^{3n} + 2(-1)^n).$$

Problem 4. Alla problem har samma talföljd. Vi härleder en rekursivform och en slutenform. Låt talföljden vara $C_1, C_1, C_2, \dots$.

(i) Rekursivform: Låt oss anta att vi redan har räknat ut för $0, 1, \dots, n-1$ par och vi vill räkna ut hur många möjligheter det finns för n par. Låt C_i vara antalet konfigurationer av i matchade par av parenteser, så $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, och $C_4 = 14$, som vi redan har räknat direkt, se bilden ovan.

Vi vet att i varje balanserad mängd måste det första tecknet vara "(" och någonstans i mängden finns det en matchning ")" för den. Mellan detta par av parenteser är det en balanserad mängd av parenteser och till höger om den en annan balanserad mängd:

$(A)B,$

där A är en balanserad mängd av parenteser och så är B . Både A och B kan innehålla upp till $n - 1$ par parenteser, men om A har k par så har B $n - k - 1$ par. Observera att vi tillåter att A eller B innehåller noll par parenteser, och att det finns exakt ett sätt att göra det: skriv inte ned någon parentes.

Så vi kan räkna alla konfigurationer där A har 0 par och B har $n-1$ par, där A har 1 par och B har $n-2$ par, osv. Summera upp dem så fås det totala antalet konfigurationer med n balanserade par:

$$C_1 = C_0 C_0$$

$$C_2 = C_1 C_0 + C_0 C_1$$

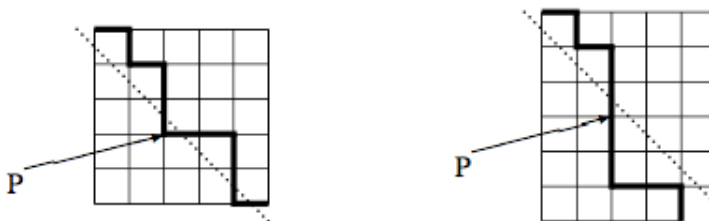
$$C_3 = C_2C_0 + C_1C_1 + C_0C_2$$

$$C_4 = C_3C_0 + C_2C_1 + C_1C_2 + C_0C_3$$

•
•
•

$$C_n = C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + \cdots + C_1C_{n-2} + C_0C_{n-1}$$

(ii) Slutform: Vi gör det genom att räkna ut hur många vägar det finns som undviker diagonalen på en $n \times n$ -rutig plan. Vi kommer att göra det genom att räkna det totala antalet vägar genom en $n \times n$ grid och sedan subtrahera det totala antalet förbjudna vägar. Följande bilder visar ett par typiska vägar som vi inte vill räkna in eftersom de korsar diagonalen.



Sådan väg kan gå över diagonalen många gånger men det finns alltid en första gång. I bilderna är punkten P den första grid-punkten som kommer på fel sida av diagonalen. Det finns alltid en sådan punkt P för varje förbjudet väg.

Vi tittar närmare på sådan väg som börjar i P : Varje gång den ursprungliga vägen går åt höger går den ner i stället och varje gång den ursprungliga vägen ned går den åt höger. Det är klart att den har gått ett steg mer nedåt än den korsar vid tiden vägen når punkten P . Så den har flyttat k steg åt höger och $n - k - 1$ steg nedåt. Så det är $(k) + (n - k - 1) = n - 1$ steg mot höger och $(k + 1) + (n - k) = n + 1$ steg nedåt. Så varje förbuden väg kan modifieras på detta sätt och varje väg som ursprungligen börjar med denna punkt och som går den $n - 1$ åt höger och $n + 1$ nedåt mostavarar exakt en

förbjuden väg. Så antalet förbjudna vägar är lika med det totala antalet vägar på en $(n-1) \times (n+1)$ -ruta.

I en $k \times m$ -ruta finns det $\binom{m+k}{m}$ vägar eftersom det finns m steg nedåt som behöver tas genom $k+1$ möjliga vägar gå nedåt, vilket innebär att vi behöver räkna på antalet möjligheter att lägga m objekt i $k+1$ boxar, som är lika med $\binom{m+k}{m}$.

Så det totala antalet vägar genom en $n \times n$ grid är $\binom{2n}{n}$ och det totala antalet förbjudna vägar är $\binom{2n}{n+1}$. Så det sökta talet är

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$