

1. Låt $p(x)$ vara ett heltals polynom, dvs

$$p(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n, \quad p_i \in \mathbb{Z}, p_n \neq 0$$

Antag att $2+\sqrt{3}$ är en rot till ekvationen

$p(x) = 0$. Visa att $2-\sqrt{3}$ är också en rot.

Bevis. (i) metod 1. Konstruera ett nytt polynom

$q(x) = p(x+2)$. Vi kan visa att $q(x)$

är ett heltals polynom (trivialt).

$2+\sqrt{3}$ är en rot till $p(x)=0 \Leftrightarrow p(2+\sqrt{3})=0$

$$\Leftrightarrow q(\sqrt{3}) = 0$$

$q(x)$ (är heltals polynom) kan skrivas som

$$q(x) = q_1(x^2) + q_2(x^2)x, \text{ där } q_1, q_2 \text{ heltals polynom.}$$

$$\text{Så } q(\sqrt{3}) = q_1(3) + q_2(3)\sqrt{3} \Leftrightarrow q_1(3) = q_2(3) = 0$$

$$\text{Men } p(2-\sqrt{3}) = q(-\sqrt{3}) = \underbrace{q_1(3)}_{=0} + \underbrace{q_2(3)}_{=0}(-\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3} \text{ är en rot.}$$

(ii) metod 2. Använd binomial-sats.

$$p(2\pm\sqrt{3}) = \sum_{k=0}^n p_k (2\pm\sqrt{3})^k = \sum_{k=0}^n p_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 2^{k-j} (\pm\sqrt{3})^j$$

Med lite undersökning (eller inspektion)

inser vi att $p(2+\sqrt{3}) + p(2-\sqrt{3})$ är rationell

och $p(2+\sqrt{3}) - p(2-\sqrt{3})$ är irrationell

$$\text{Då måste } p(2-\sqrt{3}) = 0.$$

Det finns flera sätt.

2. Finn alla lösningar till $f(x^2-y^2) = xf(y) - yf(x)$

där f är en funktion från $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

vi konsumerar att $f(x) = kx$ är en lösning

för något $k \in \mathbb{R}$. Nu bevisar vi att det inte finns andra. Der. visar att $f(x)+f(y) = f(x+y)$

$$f(ax) = af(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Sätt } x = y = 0 \text{ för } f(x^2) = xf(x) \text{ och } f(y^2) = yf(y)$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \text{ och } f \text{ är en udda funktion}$$

$$\Rightarrow f(x^2-y^2) + f(y^2) = f(x^2). \text{ Det tillsammans med att } f \text{ är udda leder till } f(u+v) = f(u) + f(v).$$

$$\text{Vidare } f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) \Rightarrow f(x^2) + 2f(x) + f(1) = (x+1)f(x) + (x+1)f(1) \Rightarrow f(x) = f(1)x$$

Pascalsträngeln & Fibonacci-talföljd.

$$\begin{array}{r}
 F_1 = 1 \quad 1 \\
 F_2 = 1 \quad 1 \quad 1 \\
 F_3 = 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
 F_4 = 3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 F_5 = 5 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 F_6 = 8 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
 F_7 = 13 \quad 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 F_1 \quad \binom{0}{0} \\
 F_2 \quad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 F_3 \quad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 F_4 \quad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 F_5 \quad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}
 \end{array}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gissning för F_n är

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

$\lfloor x \rfloor$ är det största heltal som är mindre än x .

Berisa detta påstående med induktion.