

Lösningssförslag seminarium

Nicole Nyberg

19/8-2025

1 Problem 1

Det finns tre universitet i en stad. Varje universitet har n studenter. Varje student på varje universitet känner totalt $n + 1$ studenter från den andra två universiteten. Visa att man kan välja tre studenter, en från vardera universitet, så att de alla känner varandra.

Ledning: Antag motsatsen och betrakta den student vars vänner är som mest samlade i ett och samma universitet.

1.1 Lösningssförslag

Börja med att anta motsatsen, det vill säga att vi inte kan välja tre studenter, en från vardera universitet, så att de alla känner varandra. Låt oss kalla de tre universiteten A , B , och C . Betrakta nu den student v vars vänner är som mest samlade i ett och samma universitet. Antag utan inskränkning att v går på universitet A , samt att det universitet som dess vänner är som mest samlade i är B . Låt, för varje student i , mängden $N(i)$ vara mängden av alla studenter som i känner. Låt

$$k := |N(v) \cap B|,$$

det vill säga k betecknar antal studenter som v känner i universitet B .

Notera att $k \leq n$, eftersom varje universitet har n studenter. Därför gäller även att $|N(v) \cap C| = n + 1 - k \geq n + 1 - n = 1$. Betrakta nu en student $w \in N(v) \cap C$. Eftersom v och w känner varandra kan det inte finnas någon student i B som både v och w känner, i enlighet med vårt antagande. Därför gäller $N(v) \cap N(w) \cap B = \emptyset$. Detta implicerar att $|N(w) \cap B| \leq n - k$, eftersom n studenter tillhör B och w alltså inte kan känna någon av de k studenterna som v känner. Men från uppgiften vet vi att w totalt känner $n + 1$ studenter. Detta gör att $|N(w) \cap A| \geq n + 1 - (n - k) = k + 1$.

Detta innebär att w känner minst $k + 1$ studenter i universitet A . Men vi definierade v som den student vars vänner var mest samlade i ett och samma universitet, alltså kan inte w känna fler studenter samlade i ett och samma universitet än v . Vi har alltså nått en motsägelse, vilket innebär att vårt antagande var felaktigt. Slutsatsen av detta är alltså att man kan välja tre studenter, en från vardera universitet, så att de alla känner varandra.

2 Problem 2

Hitta alla par av primtal (p, q) sådana att $p - q$ och $pq - q$ båda är kvadrattal, det vill säga 1, 4, 9,

Ledning: Kom ihåg att om ett primtal delar en produkt så måste primtalet dela en av faktorerna i produkten.

2.1 Lösningförslag

Vi börjar med att ställa upp ekvationssystemet

$$\begin{cases} p - q = a^2 & (1) \\ pq - q = b^2 & (2), \end{cases}$$

där a och b är positiva heltal. Vi subtraherar nu ledvis (1) från (2) och får då ekvationen

$$\begin{aligned} pq - q - (p - q) &= b^2 - a^2 \\ \Leftrightarrow p(q - 1) &= (b - a)(b + a). \end{aligned}$$

Eftersom p är ett primtal vet vi att p måste dela en av faktorerna i högerledet. Alltså måste antingen $p|(b - a)$ eller $p|(b + a)$. Eftersom $a > 0$ vet vi från (1) att $p > q$. Om vi använder detta i (2) ser vi att

$$b^2 = q(p - 1) < p^2,$$

vilket i detta fall implicerar att $p > b$. Notera dock att detta medför att det inte är möjligt att $p|(b - a)$, eftersom $p > b - a$. Därför återstår bara alternativet $p|(b + a)$.

Med hjälp av (1) får vi nu

$$p > p - q = a^2 \geq a,$$

vilket, tillsammans med $p > b$ ovan, ger oss att $a + b < p + b < p + p = 2p$. Eftersom vi just sett att $a + b < 2p$, måste vi därmed ha $p = a + b$. Om vi går tillbaka till ekvationen $p(q - 1) = (b - a)(b + a)$ får vi då att

$$\begin{aligned} p(q - 1) &= (b - a)(b + a) \\ \Leftrightarrow q - 1 &= b - a. \end{aligned}$$

Nu subtraherar vi ovan ekvation ledvis från ekvationen $p = a + b$ så att vi får

$$p - q + 1 = 2a,$$

vilket med hjälp av ekvation (1) ger

$$a^2 + 1 = 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1.$$

Vi vet från (1) att $p - q = a^2 = 1$. Men de enda primtal p och q som uppfyller detta är $p = 3$ och $q = 2$. Notera att dessa värden även fungerar i ekvation (2), eftersom $3 \cdot 2 - 2 = 4 = 2^2$, vilket är ett kvadrattal. Sammanfattningsvis har vi alltså att $(p, q) = (3, 2)$ är det enda paret av primtal som uppfyller att både $p - q$ och $pq - q$ är kvadrattal.

3 Problem 3

Visa att

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} = 3^n.$$

3.1 Lösningsförslag 1

Vi börjar med att notera att $\binom{n}{i}$ ej beror av j . Det gör att vi kan bryta ut faktorn $\binom{n}{i}$ från den inre summan. Vi får då

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^n \left(\binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \right).$$

Nu betraktar vi enbart summan $\sum_{j=0}^i \binom{i}{j}$. Vi vet att

$$\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} = 2^i,$$

eftersom det summan representerar är det totala antalet delmängder till en mängd med i element. Se Sats 5.1 och Exempel 5.1 i *Matematiska utmaningar* (Paul Vaderlind, s. 137 och 143). Sätter vi in detta i hela summan ovan får vi

$$\sum_{i=0}^n \left(\binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \right) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i.$$

Nu kan vi använda oss av Binomialsatsen och får då att

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = (2 + 1)^n = 3^n,$$

vilket var precis det vi ville visa.

3.2 Lösningsförslag 2

Uppgiften kan även lösas med ett kombinatoriskt resonemang. Vi observerar att $\binom{n}{i}$ beräknar hur många olika sätt vi kan välja i objekt av n . På samma sätt beräknar $\binom{i}{j}$ hur många olika sätt vi kan välja j objekt av i . Produkten $\binom{n}{i}\binom{i}{j}$ kan därför, i enlighet med multiplikationsprincipen, tolkas som antal sätt vi kan välja i objekt av n och sedan välja j objekt bland de i valda. Notera alltså att det sker två urval: ett första av storlek i och ett andra av storlek j . Detta gör att varje av våra n element har tre olika alternativ: att bli utvald två gånger, att bli utvald enbart en gång, samt att inte bli utvald alls.

Det som sker i summan

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j}$$

är att vi för varje val av i objekt av n summerar antalet sätt vi kan välja j av dessa, där vi låter j gå från 0 till i , vilket innebär att vi kan välja allt ifrån inga till alla av våra i element i det andra urvalet. Vi ser också att i antar alla värden från 0 till n , vilket innebär att vi kan välja allt ifrån inga till alla av våra n element även i det första urvalet. Det här innebär att varje av våra n element har tre alternativ för hur de blir utvalda, oberoende av varandra. Multiplikationsprincipen ger oss då att detta kan ske på 3^n olika sätt.