

Lösningsförslag för seminarie 9

David Sermoneta

August 17, 2026

Uppgift 1

Låt n vara ett udda tal sådana att 3 inte delar n . Visa att $n^2 - 1$ är delbart med 6.

Lösning. Vi vet att om n är udda, så måste n^2 också vara det, därför är $n^2 - 1$ delbart med två. Vidare har vi av omvända konjugatregeln

$$n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1).$$

Eftersom n inte är delbart med 3, så måste $n - 1$ eller $n + 1$ vara det, och vi är därför klara.

☺

Uppgift 2

Beskriv alla heltalslösningar till ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{11}. \quad (1)$$

Lösning. Vi börjar med att notera att om summan av tre tal ska vara jämn, så måste en lösning till ekvationen (1) antingen bestå av tre jämna tal, eller ett jämt och ett udda. Vi fallindelar: om x är jämt medans y och z är udda kan vi skriva om ekvationen till

$$4k_x^2 + 4k_y^2 + 4k_z^2 + 4k_z + 2 = 2^{11}.$$

Här ser vi direkt att efter delning med 2 så slutar vi upp med ett udda tal, dvs, inga lösningar existerar.

Andra fallet är när x, y och z är alla jämna. Då har vi att ekvationen går att skriva om till

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2^9.$$

Nu är vi i samma situation som innan, dvs k_x, k_y och k_z måste alla tre vara jämna, och vi kan upprepa detta 5 gånger till för att sluta upp med den ekvivalenta ekvationen

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2.$$

Denna ekvation har heltalslösningar på formen $(x', y', z') = (\pm 1, \pm 1, 0)$ (upp till permutation av variabler). Efter att ha multiplicerat tillbaka 2^{10} i ovanstående ekvation får vi heltalslösningarna till (1) att vara $(x, y, z) = (\pm 32, \pm 32, 0)$ (igen, upp till permutation av variabler) och dessa är alla lösningar.

☺

Uppgift 3

Del 1

Visa att följande påståenden om en graf G är ekvivalenta:

- (a) G är ett träd.
- (b) G har egenskapen att om vi lägger till en ny kant mellan två hörn så skapar vi en krets.
- (c) G är sammanhängande och har egenskapen att om vi tar bort en kant så kvarstår en icke-sammanhängande graf.

Lösning. Vi visar ekvivalensen av påståendena genom att visa implikationerna

$$(a) \implies (b) \implies (c) \implies (a).$$

$[(a) \implies (b)]$: Eftersom G är ett träd, vet vi redan att G är sammanhängande, så om vi lägger till en kant mellan två hörn x och y , kommer det nu att finnas två stigar från x till y , dvs en krets existerar.

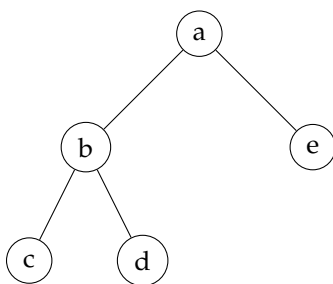
$[(b) \implies (c)]$: Egenskapen (b) medför redan att det alltid finns en stig mellan två hörn, och en kant är en stig, så tar vi bort en kant (x, y) så har vi tagit bort den enda stigen mellan x och y , dvs grafen som kvarstår är nu icke-sammanhängande.

$[(c) \implies (a)]$: Egenskapen (c) säger att det inte finns några andra stigar mellan två hörn i G , detta är precis vad det innebär att inte ha några kretsar. Alltså uppfyller G villkoren för att vara ett träd. ☺

Del 2

Undersök om det gäller att om G är ett träd med $n \geq 3$ löv, så är komplementet $\overline{G}$ icke-sammanhängande, samt innehåller en krets av storlek n .

Lösning. Eftersom ett löv bara har grad 1 så kan det inte finnas några kanter mellan löv, då detta skulle motsäga att G är sammanhängande. Låt $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ vara löven av G . Då följer det ur definitionen av $\overline{G}$ att de alla får en kant sinsemellan i $\overline{G}$. Dessa utgör en krets, så ett av påståendena är sanna. Däremot gäller det inte att $\overline{G}$ behöver vara icke-sammanhängande. Ta följande träd:



Då blir komplementet

