

Seminar 14/08-2026 Lösning

Uppgift 1

Ett tal A skrivs med 2015 siffror. Varje par av siffror som ligger intill varandra bildar ett tal som är delbart med 23 eller 17. Den sista siffran i A är 1. Vilken är den första siffran?

Lösning: Listan över alla tvåsiffriga tal som är delbara med 17 eller 23 är följande: 17, 23, 34, 46, 51, 68, 69, 85 och 92.

Om den näst sista siffran i A är a så är talet $\overline{a1}$ delbart med 17 eller 23. Det enda sådana tvåsiffriga talet i listan är 51. Om siffran före 5 är b , $A = \overline{\dots b51}$, så måste $b = 8$.

Resonerar man vidare på samma sätt så får vi att de sista nio siffrorna i A är 692346851, dvs $A = \overline{\dots 692346851}$. Vi ser att före de slutliga 851 kommer den femsiffriga gruppen 92346 att upprepas hela tiden. Eftersom $2015 = 3 + 5 \cdot 402 + 2$, dvs

$$2015 = 3 \text{ (för de slutliga tre siffrorna)} + 5 \cdot 402 \text{ (för gruppen 92346)} + 2,$$

så är de första två siffrorna i A samma som de sista två i gruppen 92346, alltså lika med 46. Den första siffran i A är därmed 4.

Uppgift 2

Visa att om a, b, c är positiva tal gäller olikheten

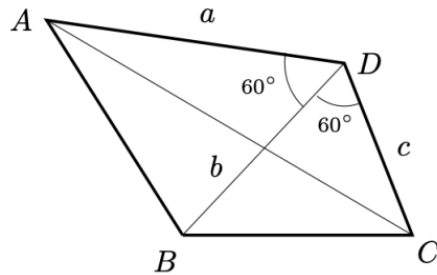
$$\sqrt{a^2 + ac + c^2} \leq \sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2}.$$

Lösning Rotuttrycken ger indikation på cosinussatsen med 120° respektive 60° på följande sätt:

$$\begin{aligned} a^2 + ac + c^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos(120^\circ), \\ a^2 - ab + b^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ), \\ b^2 - bc + c^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(60^\circ). \end{aligned}$$

Då betraktar vi en fyrhörning $ABCD$ med vinklarna ADB och BDC lika med 60° och ADC lika med 120° så att $AD = a$, $BD = b$, och $CD = c$. Så vi har:

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{a^2 + ac + c^2}, \\ AB &= \sqrt{a^2 - ab + b^2}, \\ BC &= \sqrt{b^2 - bc + c^2}. \end{aligned}$$



Det önskade olikheten är således triangelolikheten i triangeln ABC .

Uppgift 3

Antag att

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

är ett heltals polynom, och a, b, c, d är fyra olika heltal sådana att

$$p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 5.$$

Visa att det inte finns något heltal k så att $p(k) = 8$

Ledtråd: Om f är ett polynom som har a som rot så kan vi dela $f(x)$ med $(x - a)$.

Lösning Låt $q(x) = p(x) - 5$. Då $q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)h(x)$ för något heltals polynom $h(x)$ och $q(k) = 3$ för något heltal (om vi antar att det kan finnas ett sådant heltal k så att $p(k) = 8$). Vidare har vi $3 = (k - a)(k - b)(k - c)(k - d)h(k)$. Men 3 kan bara faktoriseras av mest tre olika heltal $-3, 1, -1$ exempelvis. En motsägelse eftersom HL har fyra olikfaktorer.