

Utmanande Matematik:

Seminarie 9

David Sermoneta

August 14, 2026

Uppgift 1

Låt n vara ett udda tal sådana att 3 inte delar n . Visa att $n^2 - 1$ är delbart med 6.

Uppgift 2

Beskriv alla heltalslösningar till ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{11}.$$

Uppgift 3

Hittills har vi stött på grafer med och utan kretsar. För denna uppgift kommer vi endast att betrakta enkla grafer (dvs oriktade grafer utan ögglor och multipla kanter mellan samma hörn).

Del 1

Definition 1. En graf som inte innehåller någon krets kallas *cykelfri*. Om den däremot innehåller en krets, kallas den *cyklisk*.

Definition 2. En graf kallas för ett *träd* om den är både sammanhängande och cykelfri.

Nu är vi redo att beskriva nästa uppgift. Visa att följande påståenden om en graf G är ekvivalenta:

- (a) G är ett träd.
- (b) G har egenskapen att om vi lägger till en ny kant mellan två hörn så skapar vi en krets.
- (c) G har egenskapen att om vi tar bort en kant så kvarstår en icke-sammanhängande graf.

Del 2

Definition 3. *Komplementet* av en graf G är grafen $\overline{G}$ vars hörnmängd sammanfaller med hörnmängden av G , men vars kantmängd är just de kanter mellan hörn som inte finns med i kantmängden av G .

Med andra ord, har vi att om $G = (V, E)$, så har vi att

$$\overline{G} = (V, E') \text{ där } E' = \{e \in V \times V : e \notin E\}.$$

Visa att om G är ett träd med $n \geq 3$ löv¹, så kommer komplementet $\overline{G}$ av G att vara icke-sammanhängande, samt innehålla en krets av storlek n .

¹ett hörn v kallas för löv om $d(v) = 1$