

Problem 1 (Summor av Potenser och Ekvationer).

Låt $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ vara en följd av (tillräckligt många) heltal sådan att

- (i) $-1 \leq x_i \leq 2$ för alla $i = 1, 2, \dots, n$,
- (ii) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 19$,
- (iii) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 99$.

(1) Avgör maximum och minimum av

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3.$$

(2) Avgör antalet 2:or bland talen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ om det dessutom gäller att

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3 = 79.$$

Lösningssförslag.

(1) Vi definierar först följande (självklart icke-negativa) storheter:

$$\begin{aligned} y_{-1} &: \text{antalet } -1\text{:or bland talen } x_1, \dots, x_n, \\ y_1 &: \text{antalet } 1\text{:or bland talen } x_1, \dots, x_n, \\ y_2 &: \text{antalet } 2\text{:or bland talen } x_1, \dots, x_n. \end{aligned}$$

Notera att vi inte behöver ta hänsyn till antalet nollor eftersom de inte påverkar värdet av $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3$. Med ovan storheter kan vi samla ihop lika termer och skriva om Ekvation (ii) till:

$$-1 \cdot y_{-1} + 1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 = 19.$$

På samma sätt kan vi skriva om Ekvation (iii) till

$$(-1)^2 \cdot y_{-1} + 1^2 \cdot y_1 + 2^2 \cdot y_2 = 99.$$

Lösningssmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -y_{-1} + y_1 + 2y_2 = 19 \\ y_{-1} + y_1 + 4y_2 = 99 \end{cases}$$

ges av

$$\begin{cases} y_{-1} = 40 - y_2 \\ y_1 = 59 - 3y_2 \\ y_2 \text{ godtyckligt reellt tal.} \end{cases}$$

Vi söker dock endast den delen av lösningssmängden där y_{-1}, y_1, y_2 är icke-negativa heltal. Det största talet som y_2 kan vara så att både y_{-1}

och y_1 fortfarande är positiva är $y_2 = 19$. Det minsta är $y_2 = 0$. Alltså är följande den delen av lösningsmängden vi söker:

$$\begin{cases} y_{-1} = 40 - y_2 \\ y_1 = 59 - 3y_2 \\ y_2 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 19\}. \end{cases}$$

Med storheterna y_{-1}, y_1, y_2 och lösningsmängden ovan kan vi skriva om $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3$ till

$$\begin{aligned} (-1)^3 \cdot y_{-1} + 1^3 \cdot y_1 + 2^3 \cdot y_2 &= \\ -y_{-1} + y_1 + 8y_2 &= \\ -(40 - y_2) + (59 - 3y_2) + 8y_2 &= \\ 19 + 6y_2. \end{aligned}$$

Från uttrycket $19 + 6y_2$ är det enkelt att se att 19, då $y_2 = 0, y_1 = 59, y_{-1} = 40$, är det minsta värdet som $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3$ kan anta och att 133, då $y_2 = 19, y_1 = 2, y_{-1} = 21$, är det största värdet som $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3$ kan anta.

(2) Om $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3 = 79$ vet vi från deluppgift (1) att

$$19 + 6y_2 = 79,$$

där y_2 är antalet 2:or bland talen $x_1, \dots, x_n$. Ovan ekvation löses av $y_2 = 10$, så antalet 2:or bland talen $x_1, \dots, x_n$ som uppfyller

- (i) $-1 \leq x_i \leq 2$ för alla $i = 1, 2, \dots, n$,
- (ii) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 19$,
- (iii) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 99$,
- (iv) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3 = 79$,

är lika med 10.

Problem 2 (Summor av Kvadrater och Delbarhet).

Bevisa eller ge motexempel till följande påståenden.

- (1) Låt n vara ett icke-negativt heltal. Om $2n$ är en summa av två kvadrater, då är n en summa av två kvadrater.
- (2) Summan av alla heltal m så att $m^2 + 2m + 2$ delar $m^3 + 4m^2 + 4m - 14$ är lika med -11 .

Lösningsförslag.

(1) **Påståendet är Sant.** Eftersom $2n$ är en summa av två kvadrater så finns det heltal x, y sådan att

$$2n = x^2 + y^2.$$

Då vänsterledet är jämnt är x^2 och y^2 jämna eller udda samtidigt, vilket medför att x, y både är jämna eller udda samtidigt eftersom kvadrering bevarar paritet¹. Vi delar upp i fall beroende på pariteten av x och y .

Fall 1 (x, y jämna): Låt k, l vara heltal så att $x = 2k, y = 2l$. Vi har då att $2n = 4k^2 + 4l^2$ som ger att $n = 2k^2 + 2l^2$. Notera att

$$2k^2 + 2l^2 = (k + l)^2 + (k - l)^2.$$

Detta visar att n är en summa av två kvadrater.

Fall 2 (x, y udda): Låt k, l vara heltal så att $x = 2k + 1, y = 2l + 1$. Vi har att

$$2n = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4k^2 + 4l^2 + 4k + 4l + 2.$$

Från detta får vi att $n = 2k^2 + 2l^2 + 2k + 2l + 1$. Efter prövning finner vi att

$$\begin{aligned} 2k^2 + 2l^2 + 2k + 2l + 1 &= \\ k^2 + l^2 + 1 + kl + lk + 2k + 2l - kl - lk + k^2 + l^2 &= \\ (k^2 + l^2 + 1 + 2kl + 2k + 2l) + (k^2 - 2kl + l^2) &= \\ (k + l + 1)^2 + (k - l)^2, \end{aligned}$$

vilket visar att n är en summa av två kvadrater.

(2) **Påståendet är Sant.** Vi betraktar först $m^2 + 2m + 2$ och $m^3 + 4m^2 + 4m - 14$ som polynom och utför polynomdivision. Resultatet av denna är att

$$m^3 + 4m^2 + 4m - 14 = (m^2 + 2m + 2)(m + 2) + (-2m - 18).$$

För att $m^2 + 2m + 2$ ska dela $m^3 + 4m^2 + 4m - 14$ så måste den också dela resten $-2m - 18$. Vi undersöker när det gäller. Betraktar vi nu $m^2 + 2m + 2$ och $-2m - 18$ som heltal så är ett nödvändigt villkor för att $(m^2 + 2m + 2) \mid (-2m - 18)$ att $|-2m - 18| \geq |m^2 + 2m + 2|$ eller att $-2m - 18 = 0$. Vi behandlar dessa var för sig.

Fall 1: Antag att $-2m - 18 = 0$. Då gäller det att $m = -9$.

Fall 2: Antag att $|-2m - 18| \geq |m^2 + 2m + 2|$. Eftersom $|x| = |-x|$ och $m^2 + 2m + 2 = (m + 1)^2 + 1 \geq 0$ så har vi att

$$|-2m - 18| \geq |m^2 + 2m + 2| \iff |2m + 18| \geq |(m + 1)^2 + 1| = (m + 1)^2 + 1.$$

Vi har att $|2m + 18| \geq (m + 1)^2 + 1$ om och endast om

$$2m + 18 \geq (m + 1)^2 + 1 \quad \text{eller} \quad 2m + 18 \leq -(m + 1)^2 - 1.$$

Den första olikheten uppfylls då $|m| \leq 4$ och den andra uppfylls aldrig eftersom den kan skrivas om till $(m + 2)^2 \leq -16$, vilket inget reellt m

¹Ibland kallas egenskapen att vara jämn eller udda för **paritet**.

uppfyller. Testar vi heltalsvärden inom intervallet $[-4, 4]$ finner vi att $m \in \{-2, 0, \pm 1, \pm 4\}$ är heltal som gör att $(m^2 + 2m + 2) \mid (-2m - 18)$. Summan av dessa och -9 är

$$0 + 1 - 1 + 4 - 4 - 2 - 9 = -11.$$

Problem 3 (Vänner och Gradföljder).

(1) Bland en grupp på 5 personer, är det möjligt för alla att vara vänner med exakt 2 av personerna i gruppen? Vad sägs om 3 av personerna i gruppen?

(2) Låt G vara en graf med hörn $v_1, v_2, \dots, v_n$. Vi definierar *gradföljden* av G som följderna $\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n)$ av graderna av hörnen i fallande ordning. För var och en av följderna nedan, ge ett exempel på en graf med denna som gradföljden eller visa att en graf med sådan gradföljd inte finns.

- (a) 3, 3, 2, 2, 2, 1.
- (b) 6, 6, 6, 4, 4, 3, 3.
- (c) 6, 6, 6, 4, 4, 2, 2.

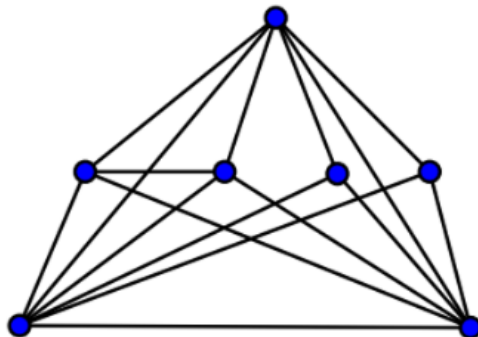
Lösningsförslag.

(1) Det är möjligt att alla är vänner med exakt 2 personer i en grupp bland 5 personer. Vi kan tolka situationen med hjälp av en graf där vänskap mellan två personer modelleras som en kant mellan två hörn. Ett exempel på en graf med 5 hörn där varje hörn har exakt grad 2 är C_5 .

Det är dock inte möjligt att alla är vänner med exakt 3 personer i en grupp av 5. Vore det fallet så skulle summan av graderna vara $3 \cdot 5 = 15$, men summan av graderna av alla hörn ska vara jämn!

(2) (a) Följden 3, 3, 2, 2, 2, 1 kan inte vara en gradföljd till en graf eftersom summan av dessa är udda.

(b) Betrakta följande graf med 6, 6, 6, 4, 4, 3, 3 som gradföljd:



Figur 1: Visar graf med gradföljd 6, 6, 6, 4, 4, 3, 3

(c) Det finns ingen graf med gradföljd 6, 6, 6, 4, 4, 2, 2. Detta är eftersom att tre av hörnen har grad 6, vilket medför att varje hörn ska ha grad större än eller lika med 3. Då denna följd har 2:or, så kan inte en graf ha denna följd som gradföljd.

Fel i lösningsförlaget? Mejla mig på ramim@math.su.se