

Seminarium 2026-08-07

Problem 1

Problemformulering

Talet a är en siffra mellan 0 och 9 sådan att

$$(3(230 + a))^2 = \overline{49280a}.$$

Vad är a ?

Lösningssförslag

Först och främst noterar vi att $\overline{49280a}$ är delbart med 9, eftersom vi har $3^2 = 9$ som faktor i vänsterledet i likheten ovan. Enligt delbarhetsreglerna gällande delbarhet med 9 vet vi att $\overline{49280a}$ är delbart med 9 om och endast om siffersumman är delbar med 9. Att siffersumman är delbar med 9 kan vi uttrycka som

$$4 + 9 + 2 + 8 + 0 + a = 9k,$$

för något $k \in \mathbb{Z}_+$. Vi får därmed att $23 + a = 9k$. Eftersom vi har villkoret att a är en siffra mellan 0 och 9 så måste $k = 3$. Därmed gäller att $23 + a = 27$ så att $a = 4$. Vi kontrollerar att $a = 4$ löser ekvationen. Vi får

$$(3(230 + 4))^2 = (3 \cdot 234)^2 = 492804,$$

så $a = 4$ är därmed lösningen vi sökte.

Problem 2

Problemformulering

Till en middag ska sju personer placeras runt ett bord. Värden vill att var och en av gästerna ska sitta mellan två personer som de känner. Fem av gästerna känner fyra av dem andra gästerna. De återstående två gästerna har vardera tre bekanta bland övriga gäster, varav en av bekantskaperna är med varandra. Är en sådan bordsplacering möjlig?

Lösningssförslag

Vi introducerar en graf med sju hörn, där hörnen representerar personer, och där en kant mellan två hörn representerar att motsvarande personer känner

varandra. En bordsplacering som uppfyller villkoret att alla gäster ska sitta mellan två personer som de känner är då möjlig om vi kan visa att det existerar en Hamiltonkrets i den graf vi konstruerat.

Att en Hamiltonkrets besöker samtliga hörn i grafen, men enbart en gång, motsvaras av att varje gäst inkluderas i bordsplaceringen. Att en Hamiltonkrets börjar och slutar på samma hörn motsvaras av att bordsplaceringen är kring ett runt bord. Eftersom Hamiltonkretsen går via grafens kanter, som representerar bekantskaper, kommer motsvarande bordsplacering göra så att alla gäster sitter mellan två personer som de känner.

Från problemformuleringen ser vi att hörnen kommer ha grader 4, 4, 4, 4, 4, 3 och 3, eftersom graden representerar antalet bekantskaper bland övriga gäster. Vi vill nu tillämpa Ores sats och för att kunna göra det krävs att

$$\deg(u) + \deg(v) \geq 7$$

för varje par av hörn u och v som inte är förbundna med en kant. Notera att olikheten ovan är uppfylld så länge minst en av u och v har grad 4. Däremot uppfylls olikheten inte om båda hörnen har grad 3, men från problemformuleringen vet vi att hörnen med grad 3 är förbundna med en kant. Villkoret i Ores sats är därmed uppfyllt, så vi kan konstatera att grafen har en Hamiltonkrets och att den efterfrågade bordsplaceringen är möjlig.

Problem 3

Problemformulering

Sandra och Erik spelar ett spel. Låt θ vara en vinkel sådan att $0^\circ < \theta < 180^\circ$, vars värde både Sandra och Erik känner till. Spelet börjar med att Erik klipper ut en triangel i papper, vars mått Erik själv bestämmer. Spelet går sedan ut på att upprepa följande steg:

- Om T har minst en vinkel som är exakt θ så avslutas spelet och Sandra vinner.
- Annars väljer Sandra en punkt P på triangelns omkrets, som inte sammanfaller med något av triangelns hörn. Sedan klipper hon triangeln från P till motstående hörn och delar den således i två mindre trianglar.
- Erik slänger en av dem två trianglarna. Den kvarvarande triangeln blir den nya T . Erik och Sandra börjar om på första punkten.

Kan ni hitta något värde på θ sådant att Sandra garanterat kan vinna på ett ändligt antal steg, oavsett hur Erik spelar? För vilka reella värden på θ gäller detta?

Lösningförslag

Vi börjar med att anta att både Sandra och Erik spelar optimalt, d.v.s. gör drag som gynnar deras eget spel. Låt den ursprungliga triangeln vara $T_0 = \triangle ABC$.

Vi påstår att om $\theta = 180^\circ/n$ för något $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ så kan Sandra alltid vinna på ett ändligt antal steg. För att visa detta betraktar vi olika fall för triangeln T_0 . Vi antar även att T_0 inte har någon vinkel som är exakt θ , eftersom det är ett specialfall och Sandra då redan har vunnit.

Fall 1: En vinkel är multipel av θ

Vi börjar med att betrakta fallet då en av vinklarna i T_0 är en heltalsmultipel av θ . Antag utan inskränkning att detta gäller vinkeln $\angle A$, så att vi kan skriva $\angle A = k\theta$ för något $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Vi påstår att Sandra garanterat kan vinna för alla heltal $k \geq 2$. Det kan hon göra genom att alltid välja punkten P så att vinkeln $\angle A$ delas upp i vinklarna θ och $(k-1)\theta$.

Vi bevisar påståendet med hjälp av induktion. Låt $k = 2$ vara vårt basfall. Då kommer Sandra, med taktiken beskriven ovan, välja punkten P så att vinkeln $\angle A = 2\theta$ delas upp i två vinklar av storlek θ . Sandra har då vunnit oavsett vilken triangel Erik väljer att behålla.

Induktionsantagande är att det, för något $k \geq 2$, gäller att om $\angle A = k\theta$ så kan Sandra garanterat vinna. Om vi nu betraktar fallet då $\angle A = (k+1)\theta$ så kommer Sandra välja punkten P sådan att vinkeln $\angle A$ delas upp i de två mindre vinklarna θ och $k\theta$. Om Erik väljer triangeln med vinkeln θ så har Sandra vunnit och om Erik väljer triangeln med vinkeln $k\theta$ så kan vi, till följd av induktionsantagandet, säga att Sandra garanterat kan vinna. Enligt induktionsprincipen gäller det därför att om $\angle A = k\theta$ för något $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ så kan Sandra garanterat vinna, för alla dessa möjliga värden på k .

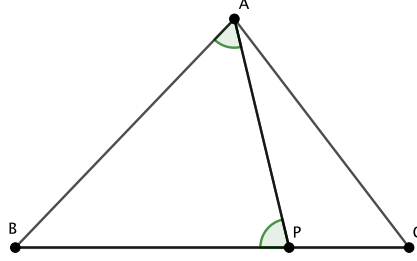
Fall 2: Det finns ingen vinkel som är multipel av θ

Notera att eftersom $\theta = 180^\circ/n$ för något $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ så gäller att $180^\circ = n\theta$. Sandra kommer då kunna placera P , säg på sidan BC , sådan att $\angle BPA = k\theta$ för något $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ så att vinkeln är en heltalsmultipel av θ . Eftersom sidovinklar summerar till 180 grader gäller att $\angle CPA = 180^\circ - k\theta = (n-k)\theta$. Det betyder att oavsett om Erik väljer att behålla $\triangle BPA$ eller $\triangle CPA$ kommer triangeln innehålla minst en vinkel som är en heltalsmultipel av θ . Vi befinner oss då åter i Fall 1 och Sandra kan garantera sin vinst, som beskrivet i Fall 1.

Nu betraktar vi fallet då det inte gäller att $\theta = 180^\circ/n$ för något $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Erik kan då börja med att välja T_0 så att ingen av dess vinklar är heltalsmultiplar av θ . För att spela optimalt bör Sandra skapa en vinkel som är en heltalsmultipel av θ i en av de mindre triangelarna. Oavsett hur hon försöker göra detta kommer samtliga eventuella vinklar som är multiplar av θ tillhöra en och samma av dem två mindre triangelarna.

Säg, till exempel, att Sandra skapar en vinkel $\angle BAP = k\theta$, för något $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Eftersom $\angle A$ inte är en multipel av θ , till följd av hur Erik konstruerade triangeln, kan då inte också $\angle CAP$ vara en multipel av θ . Se Figur 1.

Vi antar nu att $\angle CPA$ är en multipel av θ , så att $\angle CPA = m\theta$ för något $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Vi använder nu att vinkelsumman i triangeln T_0 är 180° och att sidovinklar summerar till 180° för att skriva



Figur 1: Triangel $T_0 = \triangle ABC$ med P placerad

$$\angle B = 180^\circ - \angle BAP - \angle BPA = 180^\circ - \angle BAP - (180^\circ - \angle CPA).$$

Vi har därför att

$$\angle B = \angle CPA - \angle BAP = m\theta - k\theta = (m - k)\theta,$$

och därmed är vinkel B en multipel av θ , vilket är en motsägelse till hur Erik konstruerade triangeln T_0 . Därmed har vi att $\triangle ACP$ inte har någon vinkel som är en heltalsmultipel av θ .

På liknande sätt kan man se att oavsett hur Sandra spelar kommer samtliga eventuella vinklar som är multiplar av θ tillhöra en och samma av dem två mindre triangelarna. Erik kan då alltid välja att slänga just den triangel som innehåller dem vinklar som är multiplar av θ . Därför kan Sandra inte garanterat vinna om det inte gäller att $\theta = 180^\circ/n$ för något $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.