

Problem 1 (Summor av Potenser och Ekvationer).

Låt $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ vara en följd av (tillräckligt många) heltal sådan att

- (i) $-1 \leq x_i \leq 2$ för alla $i = 1, 2, \dots, n$,
- (ii) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 19$,
- (iii) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 99$.

(1) Avgör maximum och minimum av

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3.$$

(2) Avgör antalet 2:or bland talen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ om det dessutom gäller att

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3 = 79.$$

Problem 2 (Summor av Kvadrater och Delbarhet).

Bevisa eller ge motexempel till följande påståenden.

- (1) Låt n vara ett icke-negativt heltal. Om $2n$ är en summa av två kvadrater, då är n en summa av två kvadrater.
- (2) Summan av alla heltal m så att $m^2 + 2m + 2$ delar $m^3 + 4m^2 + 4m - 14$ är lika med -11 .

Problem 3 (Vänner och Gradföljder).

(1) Bland en grupp på 5 personer, är det möjligt för alla att vara vänner med exakt 2 av personerna i gruppen? Vad sägs om 3 av personerna i gruppen?

(2) Låt G vara en graf med hörn $v_1, v_2, \dots, v_n$. Vi definierar *gradföljden* av G som följderna $\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n)$, alltså graderna av hörnen i given ordning. För var och en av följderna nedan, ge ett exempel på en graf med denna som gradföljden eller visa att en graf med sådan gradföljd inte finns.

- (a) 3, 3, 2, 2, 2, 1.
- (b) 6, 6, 6, 4, 4, 3, 3.
- (c) 6, 6, 6, 4, 4, 2, 2.

Oklar formulering? Fel? Mejla mig på ramim@math.su.se