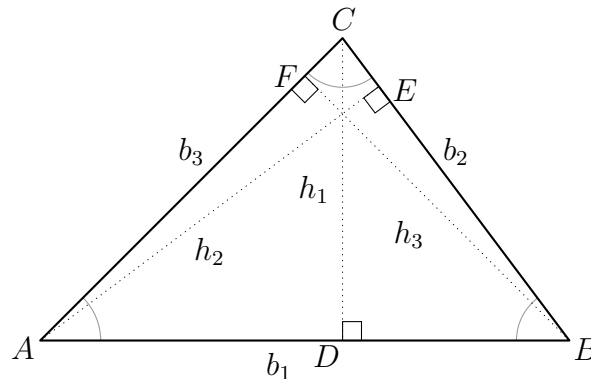


Problem 1 (Felaktigt Bevis?). Shamiur har bevisat att arean av en triangel är *väldefinierad*, alltså att den är samma oavsett vilket höjd-bas par i en triangel du använder för att beräkna den. Är beviset korrekt? Om inte, hitta alla fel:

Vi vill visa att $b_1 h_1 = b_2 h_2 = b_3 h_3$ för bas-höjd par (b_i, h_i) där $i = 1, 2, 3$, av en godtycklig triangel. Division med två på vardera sida av likheten visar att arean av en triangel är väldefinierad. Betrakta därför en godtycklig triangel $\triangle ABC$ med bas-höjd par (b_i, h_i) , där $i = 1, 2, 3$. Se Figur 1 för illustration på hur den *kan* se ut. Den måste dock inte se ut på det viset.



Figur 1: Visar triangeln $\triangle ABC$ samt andra inskrivna trianglar. Bas-höjd par är markerade.

Notera från Figur 1 att $\angle ABE = \angle CBD$ och att $\angle AEB = \angle BDC = 90^\circ$. Per vinkelsumman av en triangeln måste $\angle BAE = \angle BCD$. Alltså har vi att $\triangle ABE \cong \triangle BCD$, och då gäller att

$$\frac{AE}{CD} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{AB}{BC},$$

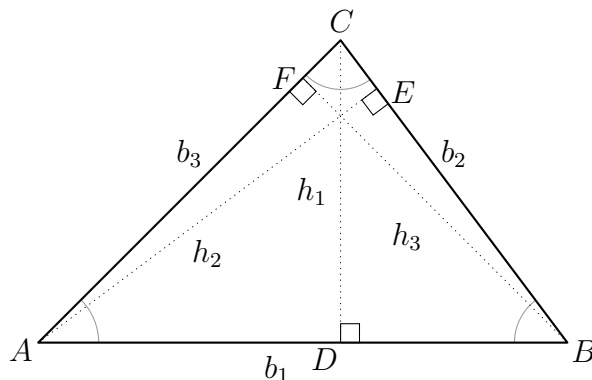
från vilket vi har att $h_2 b_2 = h_1 b_1$. Lägg också märke till i Figur 1 att $\angle BAF = \angle CAD$ och att $\angle ADC = \angle AFB = 90^\circ$. Ännu en gång, per vinkelsumman av en triangeln måste $\angle ACD = \angle ABF$. Vi har nu att $\triangle ABC \sim \triangle ABF$, så då gäller att

$$\frac{AC}{AB} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{h_3}{h_1} = \frac{BF}{CD},$$

från vilket vi får att $h_1 b_3 = h_3 b_1$. Därav har vi att $h_1 b_1 = h_2 b_2 = h_3 b_3$. $\square$

Lösningförslag. Beviset har felaktigheter. Nedan finns en korrigerad version med felen överstrykna.

Vi vill visa att $b_1 h_1 = b_2 h_2 = b_3 h_3$ för bas-höjd par (b_i, h_i) där $i = 1, 2, 3$, av en godtycklig triangel. Division med två på vardera sida av likheten visar att arean av en triangel är väldefinierad. Betrakta därför en godtycklig triangel $\triangle ABC$ med bas-höjd par (b_i, h_i) , där $i = 1, 2, 3$. Se Figur 1 för illustration på hur den *kan* se ut. Den måste dock inte se ut på det viset.



Figur 1: Visar triangeln $\triangle ABC$ samt andra inskrivna trianglar. Bas-höjd par är markerade.

Notera från Figur 1 att $\angle ABE = \angle CBD$ och att $\angle AEB = \angle BDC = 90^\circ$. Per vinkelsumman av en triangeln måste $\angle BAE = \angle BCD$. Alltså har vi att $\triangle ABE \cong \triangle BCD$ $\triangle ABE \sim \triangle BCD$, och då gäller att

$$\frac{AE}{CD} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2/b_1}{b_2} = \frac{AB}{BC},$$

från vilket vi har att $h_2 b_2 = h_1 b_1$. Lägg också märke till i Figur 1 att $\angle BAF = \angle CAD$ och att $\angle ADC = \angle AFB = 90^\circ$. Ännu en gång, per vinkelsumman av en triangeln måste $\angle ACD = \angle ABF$. Vi har nu att $\triangle ABC \sim \triangle ABF$ $\triangle ACD \sim \triangle ABF$, så då gäller att

$$\frac{AC}{AB} \frac{AB}{AC} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{h_3}{h_1} = \frac{BF}{CD},$$

från vilket vi får att $h_1 b_3 = h_3 b_1$ $h_1 b_1 = h_3 b_3$. Därav har vi att $h_1 b_1 = h_2 b_2 = h_3 b_3$. $\square$

Problem 2 (Stabila Polynom). Vännerna Adolf och Edward söker villkor för att ett andragradspolynom med reella koefficienter ska ha rötter i det *vänstra halvplanet* (mängden av komplexa tal med realdel mindre än 0). Polynom med denna egenskap kallas för (*Hurwitz*-)stabila polynom av andra graden. De upptäcker något intressant i deras testberäkningar:

- Polynomet $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$ har positiva koefficienter, dess rötter, $x_1 = x_2 = -1$, tillhör det vänstra halvplanet.

- Polynommet $p_2(x) = 3x^2 + 4x + 19$ har positiva koefficienter, dess rötter, $x = -\frac{2}{3} \pm \frac{i\sqrt{53}}{3}$, tillhör det vänstra halvplanet.
- Polynommet $p_3(x) = 0.01x^2 + 100x + 0.1$ har positiva koefficienter, dess rötter, $x_1 \approx -10000, x_2 \approx -0.001$, tillhör det vänstra halvplanet.

(1) Adolf förmodar att ett polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ är stabilt om dess koefficienter a, b, c är positiva reella tal. Bevisa påståendet eller ge ett motexempel.

(2) Edward påstår nu att varje stabilt andragradspolynom $q(x)$ har positiva reella koefficienter. Bevisa påståendet eller ge ett motexempel.

Lösningsförslag.

(1) Rötterna till polynommet $p(x) = ax^2 + bx + c$, där $a, b, c > 0$, ges av

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vi delar upp det i fall beroende på om *diskriminanten* $\Delta = b^2 - 4ac$ är positiv, negativ eller noll.

Fall 1 ($\Delta > 0$): Vi har att lösningen

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0.$$

Eftersom att $b = \sqrt{b^2} > \sqrt{b^2 - 4ac}$ så gäller det även att

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0.$$

Därav är $p(x)$ stabil.

Fall 2 ($\Delta = 0$): Vi har att det endast finns en lösning,

$$x_{12} = -\frac{b}{2a},$$

som är negativ eftersom att $a, b > 0$. Så $p(x)$ är stabil i detta fall.

Fall 3 ($\Delta < 0$): Vi har nu att rötterna till $p(x)$ är komplexa med realdel $-b/(2a)$, som är negativt. Därav är $p(x)$ stabilt.

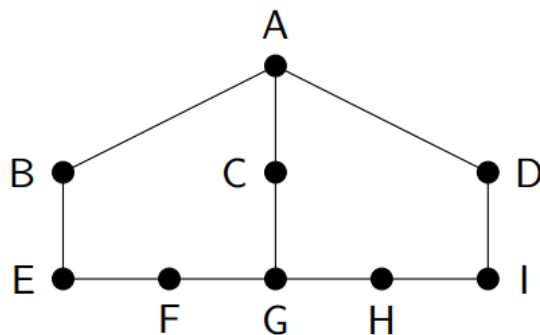
I varje fall har vi funnit att $a, b, c > 0$ medför att $p(x)$ är stabilt. Så Adolf har rätt.

(2) Edward har fel. Polynommet

$$q(x) = -x^2 - 2x - 1 = -(x + 1)^2$$

har rötterna $x_1 = x_2 = -1$, vilket säger att den är stabil, men ändå så dess koefficienter är negativa.

Problem 3 (Plogbilar & Brevbärare). Grafen här nedan modellerar ett villaområde där hörnen representerar husen i området och kanterna representerar gatorna.



Figur 2: Visar villaområde representerad som graf med 9 hörn från A till I och 10 kanter. Hörn representerar hus och kanter representerar gator.

- (1) Är det möjligt för en plogbil att ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång? Motivera ditt svar.
- (2) En ny väg byggs mellan husen B och C. Kan då plogbilen ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång? Motivera ditt svar.
- (3) Är det möjligt för en brevbärare att bära ut brev till samtliga hus i villaområdet utan att passera samma hus mer än en gång? Motivera ditt svar.

Lösningsförslag.

- (1) Att plogbilen kan ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång är "ekvivalent" med att det finns en Eulerstig i graf modellen av området given i Figur 2. Då varje hörn har jämn grad förutom A och G, har grad 3, så får vi via *Eulers sats* (sats 15.4(b), s.419) att det finns en Eulerstig. Därav kan plogbilen ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång.
- (2) Nu när det finns en gata mellan B och C så har fler än 2 hörn udda grad. Därav säger *Eulers sats* (sats 15.4(b), s.419) att det inte kan finnas en Eulerstig i den ändrade grafen. Alltså kan inte plogbilen ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång.
- (3) Att en brevbärare kan bära ut brev till samtliga hus i villaområdet utan att passera samma hus mer än en gång är "ekvivalent" med att vi kan hitta en Hamiltonstig i grafen i Figur 2. En sådan stig är

$$C - G - F - E - B - A - D - I - H.$$