

Problem 1. Finns det en graf med sju hörn som alla har grad tre? I så fall, ge ett exempel på en sådan. Om inte, förklara varför.

Lösningsförslag. Per *Handskakningslemmat* (sats 15.1, s.409) ska summan av graderna vara jämn. Om var och en av de 7 hörnen har grad 3 så är summan $7 \cdot 3 = 21$, vilket inte är jämnt. Därav kan det inte finnas någon sådan graf.

Problem 2. Cameron och Robin har hyrt en lägenhet tillsammans. De anordnar en middagsbjudning dit 10 andra vänner är bjudna. I gruppen på 12 personer känner var och en minst 6 andra personer.

- (1) Bevisa att de kan placeras runt ett runt bord på ett sådant sätt att alla känner de två personer som sitter bredvid dem.
- (2) I sista minuten anländer ytterligare en person, som också känner minst 6 av de närvarande personerna. Kan du nu garantera att de fortfarande kan sitta vid bordet enligt samma villkor?

Lösningsförslag. Vi kan modellera middagsbjudningen med hjälp av en graf. Varje person är ett hörn och att två personer känner varandra representerar vi med att det finns en kant mellan de.

- (1) Att kunna placera ut personerna i ett **runt** bord (krets) så att varje person känner sina grannar (har kant mellan grannar, så sammanhängande) är samma sak som att kunna hitta en krets i grafen där varje hörn besöks exakt en gång, då vi inte kan placera ut samma person i två platser. Vi behöver alltså visa att grafen är *Hamiltonsk*. Då vi har att varje person känner minst 6 andra, alltså att $\deg(v) \geq 6$ säger korollarium 15.2 (s.422) att det finns en Hamiltonkrets. Därav kan vi placera personerna enligt instruktion.
- (2) Nej, hade vi $n = 13$ personer så skulle sats 15... garantera existens av en Hamiltonkrets om graden på varje hörn var $\geq 13/2 = 6.5$, alltså större än eller lika med 7. Ett motexempel till detta är om vi delar upp personerna i två lika stora grupper (6 pers) där varje person känner varandra, och sedan låter den 13:e personen alla personer. Denna graf saknar Hamiltonkrets. Se nedan för bild.

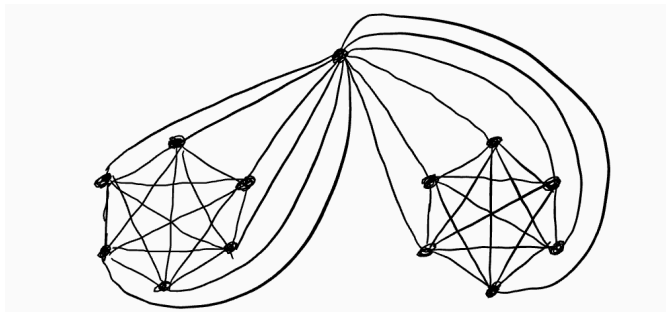


Bild 1: Visar graf med 13 hörn, alla med grad större än 6, som saknar Hamiltonkrets.

Problem 3. Betrakta följande graf.

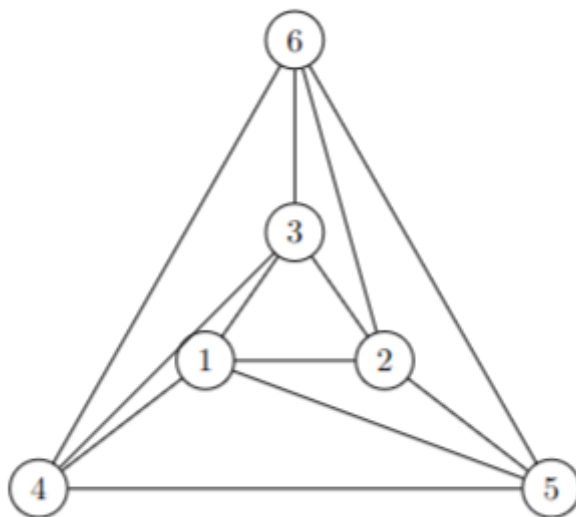


Bild 1: Visar graf med 6 noder/hörn och 12 kanter.

Avgör huruvida

- (1) grafen är bipartit,
- (2) grafen är Eulersk,
- (3) grafen är Hamiltonsk,

och motivera varför.

Lösningsförslag.

- (1) Grafen ovan har en udda krets, en krets med udda antal kanter, (triangel med hörn 1, 2, 3), och per sats 15.7 (s.424), som säger att en graf G är bipartit om den saknar udda krets, så är grafen ovan inte bipartit.

- (2) Eulers sats (sats 15.4(a), s.419) säger att varje sammanhängande graf G är Eulersk om och endast om varje hörn i G har jämn grad. Grafen ovan är sammanhängande, och räknar vi graden på varje hörn finner vi att den är lika med 4, som är jämnt.
- (3) Grafen är Hamiltonsk eftersom den innehåller Hamiltonkretsen given av hörnen $1 - 2 - 6 - 3 - 4 - 5 - 1$ (i given ordning).