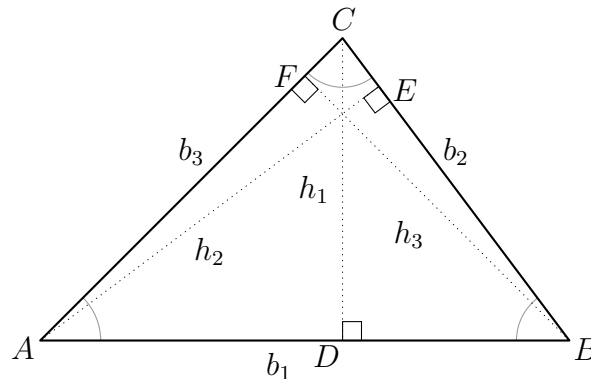


Problem 1 (Felaktigt Bevis?). Shamiur har bevisat att arean av en triangel är *väldefinierad*, alltså att den är samma oavsett vilket höjd-bas par i en triangel du använder för att beräkna den. Är beviset korrekt? Om inte, hitta alla fel:

Vi vill visa att $b_1 h_1 = b_2 h_2 = b_3 h_3$ för bas-höjd par (b_i, h_i) där $i = 1, 2, 3$, av en godtycklig triangel. Division med två på vardera sida av likheten visar att arean av en triangel är väldefinierad. Betrakta därför en godtycklig triangel $\triangle ABC$ med bas-höjd par (b_i, h_i) , där $i = 1, 2, 3$. Se Figur 1 för illustration på hur den *kan* se ut. Den måste dock inte se ut på det viset.



Figur 1: Visar triangeln $\triangle ABC$ samt andra inskrivna trianglar. Bas-höjd par är markerade.

Notera från Figur 1 att $\angle ABE = \angle CBD$ och att $\angle AEB = \angle BDC = 90^\circ$. Per vinkelsumman av en triangeln måste $\angle BAE = \angle BCD$. Alltså har vi att $\triangle ABE \cong \triangle BCD$, och då gäller att

$$\frac{AE}{CD} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{AB}{BC},$$

från vilket vi har att $h_2 b_2 = h_1 b_1$. Lägg också märke till i Figur 1 att $\angle BAF = \angle CAD$ och att $\angle ADC = \angle AFB = 90^\circ$. Ännu en gång, per vinkelsumman av en triangeln måste $\angle ACD = \angle ABF$. Vi har nu att $\triangle ABC \sim \triangle ABF$, så då gäller att

$$\frac{AC}{AB} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{h_3}{h_1} = \frac{BF}{CD},$$

från vilket vi får att $h_1 b_3 = h_3 b_1$. Därav har vi att $h_1 b_1 = h_2 b_2 = h_3 b_3$. $\square$

Problem 2 (Stabila Polynom). Vännerna Adolf och Edward söker villkor för att ett andragradspolynom med reella koefficienter ska ha

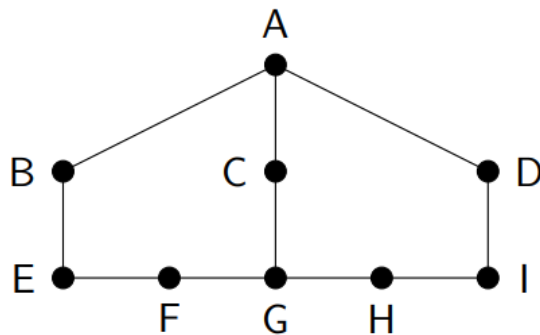
rötter i det *vänstra halvplanet* (mängden av komplexa tal med realdel mindre än 0). Polynom med denna egenskap kallas för (*Hurwitz-*)*stabila* polynom av andra graden. De upptäcker något intressant i deras testberäkningar:

- Polynomet $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$ har positiva koefficienter, dess rötter, $x_1 = x_2 = -1$, tillhör det vänstra halvplanet.
- Polynomet $p_2(x) = 3x^2 + 4x + 19$ har positiva koefficienter, dess rötter, $x = -\frac{2}{3} \pm \frac{i\sqrt{53}}{3}$, tillhör det vänstra halvplanet.
- Polynomet $p_3(x) = 0.01x^2 + 100x + 0.1$ har positiva koefficienter, dess rötter, $x_1 \approx -10000$, $x_2 \approx -0.001$, tillhör det vänstra halvplanet.

(1) Adolf förmodar att ett polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ är stabilt om dess koefficienter a, b, c är positiva reella tal. Bevisa påståendet eller ge ett motexempel.

(2) Edward påstår nu att varje stabilt andragradspolynom $q(x)$ har positiva reella koefficienter. Bevisa påståendet eller ge ett motexempel.

Problem 3 (Plogbilar & Brevbärare). Grafen här nedan modellerar ett villaområde där hörnen representerar husen i området och kanterna representerar gatorna.



Figur 2: Visar villaområde representerad som graf med 9 hörn från A till I och 10 kanter. Hörn representerar hus och kanter representerar gator.

(1) Är det möjligt för en plogbil att ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång? Motivera ditt svar.

(2) En ny väg byggs mellan husen B och C. Kan då plogbilen ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång? Motivera ditt svar.

(3) Är det möjligt för en brevbärare att bära ut brev till samtliga hus i villaområdet utan att passera samma hus mer än en gång? Motivera ditt svar.