

Anmärkning. Illustrationerna nedan ska inte ses som en del av bevisen, utan är mer som hjälpmedel för att visualisera situationen och varje ändring på den vi gör.

Problem 1. Visa att *cevianer* (se fotnot på s. 267) som är vinkelräta mot motstående sidor av triangeln är konkurrenta.

Lösningförslag. Vi definierar först följande:

$D :=$ punkten på BC där cevianen som strålar från A slutar,

$E :=$ punkten på AC där cevianen som strålar från B slutar,

$F :=$ punkten på AB där cevianen som strålar från C slutar,

och ritar ut cevianerna i triangeln. Se nedan för illustration.

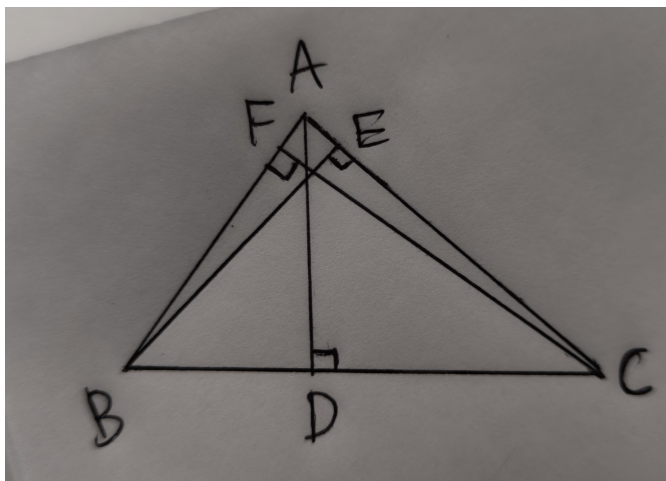


Bild 1: Visar triangeln $\triangle ABC$ och dess cevianer (enligt uppgiftinstruktion), och markerade punkter D, E, F . Notera att vi inte från denna bild kan konstatera att AD, BE, CF är konkurrenta.

Triangeln $\triangle BFC$ och $\triangle BDA$ är likformiga, eftersom de delar vinklarna $\angle B$ och 90° . Triangeln $\triangle AEB$ och $\triangle AFC$ är också likformiga

då trianglarna delar vinklarna $\angle A$ och 90° . Samma sak gäller för trianglarna $\triangle CDA$ och $\triangle CEB$. Därav gäller följande likheter:

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BA},$$

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}, \text{ och,}$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{BC}.$$

Multipliserar vi vänsterleden med varandra får vi att

$$\frac{BF}{BD} \cdot \frac{AE}{AF} \cdot \frac{CD}{CE} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CA}{BC} = 1.$$

Per *Cevas sats* (sats 9.8, s.267), är AD , BE , CF konkurrenta.

Problem 2. En liksidig triangel har sidlängd $4\sqrt{3}$ l.e (längdenheter). Låt Q vara en punkt innanför triangeln så att dess vinkelräta avstånd från två sidor av triangeln är 1 l.e och 2 l.e. Vad är det vinkelräta avståndet till den tredje sidan?

Lösningsförslag. Låt $\triangle ABC$ var triangeln vi jobbar med. Vi ritar först ut de vinkelräta linjestyckena från punkten Q till triangelns sidor, och ritar sedan ut sträckorna från Q till triangelns hörn. Se illustration nedan.

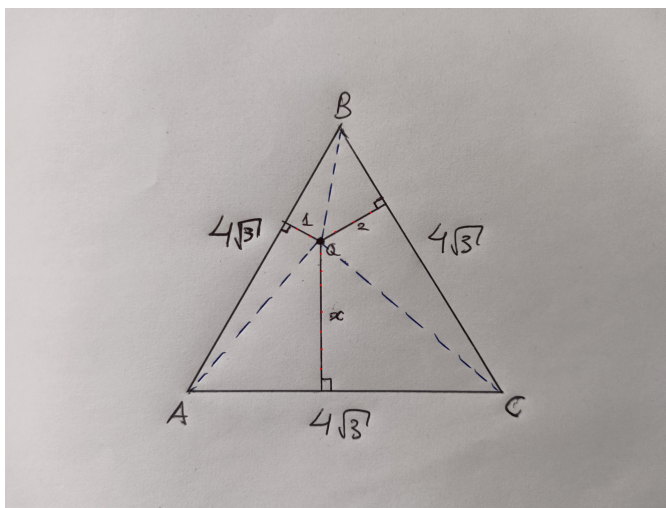


Bild 2: Visar Liksiktig triangel med sidlängd $4\sqrt{3}$, punkt Q och dess vinkelräta sträckor från sidorna av triangeln (svart med röda prickar), samt sträckorna från Q till triangelns hörn (blått, prickad). Sträckan x är den vi söker.

Notera i Bild 2 att vi nu kan se triangeln $\triangle ABC$ som uppdelad i tre

trianglar: ΔAQB , ΔAQC och ΔBQC . Det är därför trivialt att

$$a(\Delta ABC) = a(\Delta AQB) + a(\Delta AQC) + a(\Delta BQC).$$

Arean av en triangel ges av produkten av hälften av basen och höjden. Höjden på ΔABC , får vi via *Pythagoras sats* till att vara 6, så vi får att

$$a(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}.$$

Höjderna till ΔAQB och ΔBQC vet vi är 1 respektive 2, så vi får att

$$\begin{aligned} a(\Delta AQB) + a(\Delta BQC) + a(\Delta AQC) &= \\ \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot x &= \\ 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot x. & \end{aligned}$$

Använder vi att summan av areorna på ΔAQB , ΔAQC och ΔBQC är $a(\Delta ABC)$, samt det vi räknat ovan så får vi att

$$\begin{aligned} 12\sqrt{3} &= 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot x \iff \\ 6\sqrt{3} &= 2\sqrt{3} \cdot x \iff \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Med detta har vi funnit att det vinkelräta avståndet från Q till den tredje sidan är $x = 3$ i.e.

Problem 3. Låt ΔABC vara en triangel och låt punkten X ligga på CB , låt punkten Y ligga på AC , och Z ligga på AB . Ingen av punkterna ligger på något hörn. Antag sedan att $\angle XAB = \angle XAC$, $\angle YBC = \angle YBA$ och $\angle ZCA = \angle ZCB$. Visa att AX, BY, CZ är konkurrenta.

Lösningsförslag. Vi ritar först ut sträckor XP och XQ som är vinkelräta mot AB , respektive AC , och binder samman X till AB respektive AC . Se nedan för illustration.

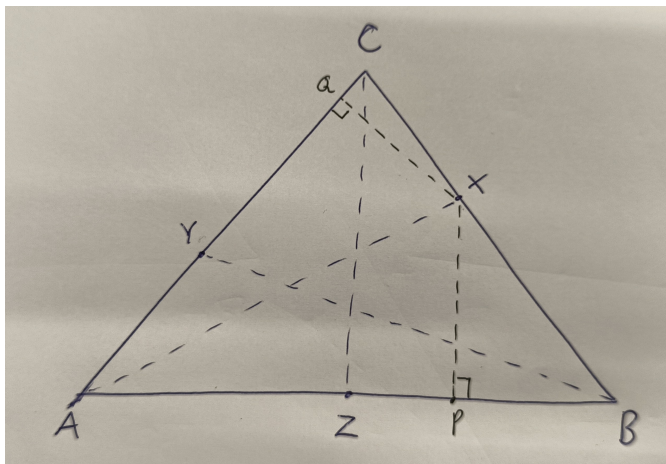


Bild 3: Visar triangel med cevianer (blått, prickad) samt sträckorna XP och XQ (svart, prickad)

Det vi ser med dessa sträckor är att

$$\sin \angle XAB = \frac{XP}{AX} \quad \text{och} \quad \sin \angle XAC = \frac{XQ}{AX}.$$

Det gäller även att

$$\sin \angle B = \frac{XP}{BX} \quad \text{och} \quad \sin \angle C = \frac{XQ}{CX}.$$

Dividerar vi BX med CX får vi därför

$$\begin{aligned} \frac{BX}{CX} &= \frac{XP}{\sin \angle B} \bigg/ \frac{XQ}{\sin \angle C} \\ &= \frac{XP}{XQ} \cdot \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} \\ &= \frac{AX \cdot \sin \angle XAB}{AX \cdot \sin \angle XAC} \cdot \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} \\ &= \frac{\sin \angle XAB}{\sin \angle XAC} \cdot \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B}, \end{aligned}$$

då $\angle XAB = \angle XAC$.

Nu ritar vi istället ut sträckor YV och YU som är vinkelräta mot AB , respektive CB , och binder samman Y till AB respektive CB . Se nedan för illustration.

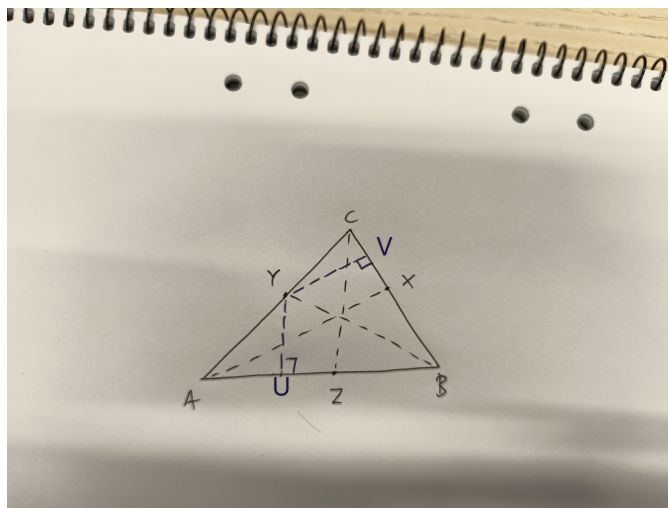


Bild 4: Visar triangel med cevianer (svart, prickad) samt sträckorna YU och YV (blått, prickad)

Vi får nu att

$$\sin \angle YBC = \frac{YV}{YB} \quad \text{och} \quad \sin \angle YBA = \frac{YU}{YB},$$

vilket medför att

$$\frac{\sin \angle YBC}{\sin \angle YBA} = \frac{YV}{YB} / \frac{YU}{YB} = \frac{YV}{YU}.$$

Samtidigt gäller det att

$$\sin \angle C = \frac{YV}{CY} \quad \text{och} \quad \sin \angle A = \frac{YU}{AY}.$$

Därför har vi att

$$\begin{aligned} \frac{CY}{AY} &= \frac{YV}{\sin \angle C} / \frac{YU}{\sin \angle A} \\ &= \frac{YV}{YU} \cdot \frac{\sin \angle A}{\sin \angle C} \\ &= \frac{\sin \angle YBC}{\sin \angle YBA} \cdot \frac{\sin \angle A}{\sin \angle C} = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle C}, \end{aligned}$$

eftersom att $\angle YBC = \angle YBA$.

Ritar vi nu ut sträckor ZR och ZS som är vinkelräta mot AC , respektive CB , och binder samman Z till AC respektive CB , och gör liknande beräkningar som ovan så kommer vi fram till att

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{\sin \angle ZCA}{\sin \angle ZCB} \cdot \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A},$$

eftersom att $\angle ZCA = \angle ZCB$. Alltså har vi genom produkter av våra beräknade kvoter att

$$\frac{BX \cdot CY \cdot AZ}{CX \cdot AY \cdot BZ} = \frac{\sin \angle C \cdot \sin \angle A \cdot \sin \angle B}{\sin \angle B \cdot \sin \angle C \cdot \sin \angle A} = 1.$$

Per *Cevas sats* (sats 9.8, s.267) medför ovan att AX , BY , CZ är konkurrenta linjestycken.