Seminarium 30-06-2026

Problem 1

Problemformulering
Hitta alla tupler av tal (x, y, z) sådana att när ett av dessa tal, oavsett vilket vi väljer, adderas till produkten av resterande två blir summan 2. Ledning: Ställ upp ett ekvationssystem.

Lösningsförslag
Vi skriver om problemet som följande ekvationssystem

$$\begin{cases} x + yz = 2 & (1) \\ y + xz = 2 & (2) \\ z + xy = 2. & (3) \end{cases}$$

Nu subtraherar vi ekvation (2) från ekvation (1) och får

$$\begin{aligned} & x + yz - (y + xz) = 2 - 2 \\ \iff & x(1 - z) - y(1 - z) = 0 \\ \iff & (1 - z)(x - y) = 0. \qquad (4) \end{aligned}$$

Ekvation (4) uppfylls om $z = 1$ eller $x = y$.

<u>Fall $z = 1$:</u> Under antagande att $z = 1$ kan det ursprungliga ekvationssystemet skrivas som

$$\begin{cases} x + y = 2 & (5) \\ 1 + xy = 2. & (6) \end{cases}$$

Från ekvation (5) har vi att $x = 2 - y$. Om vi substituerar detta värde för x i ekvation (6) och förenklar så får vi andragradsekvationen

$$y^2 - 2y + 1 = 0,$$

son kan lösas med exempelvis pq-formeln, och vi får att ekvationen har den dubbla roten $y = 1$. Från $x = 2 - y$ får vi då att $x = 2 - 1 = 1$. Därmed ser vi att i fallet då $z = 1$ har problemet enbart lösningen $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Fall $x = y$: Under antagandet att $x = y$ kan det ursprungliga ekvationssystemet skrivas som

$$\begin{cases} x + xz = 2 & (7) \\ z + x^2 = 2. & (8) \end{cases}$$

Nu skriver vi z uttryckt i x med hjälp av ekvation (7) och får

$$x + xz = 2$$

$$\iff x(1 + z) = 2.$$

Notera att $x \neq 0$, eftersom om $x = 0$ är vänsterledet lika med 0. Därför dividerar vi med x på båda sidor och får att

$$1 + z = \frac{2}{x}$$

$$\iff z = \frac{2}{x} - 1.$$

Om vi nu substituerar z med detta uttryck i ekvation (8) så får vi

$$\frac{2}{x} - 1 + x^2 = 2,$$

vilket, efter att vi multiplicerar med x i båda led, kan skrivas

$$x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Vi kan nu faktorisera vänsterledet och får då

$$(x - 1)^2(x + 2) = 0,$$

vilket har lösningarna $x = 1$ och $x = -2$. Eftersom $x = y$ och $z = 2/x - 1$ får vi de två lösningarna $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ och $(x, y, z) = (-2, -2, -2)$. Notera att vi redan fann lösningen $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ i fallet då $z = 1$.

Sammanfattningsvis har vi alltså funnit att $(1, 1, 1)$ och $(-2, -2, -2)$ är samtliga tupler av tre tal sådana att när något av talen i tupeln, oavsett vilket vi väljer, adderas till produkten av resterande två blir summan 2.

Problem 2

Problemformulering

Lös ekvationen

$$\sqrt{x - 3} + \sqrt{\sqrt{x - 3}} = \frac{15}{4} \tag{9}$$

för $x \geq 3$.

Lösningsförslag
Vi börjar med att införa den nya variabeln $z = \sqrt{\sqrt{x-3}}$. Eftersom $x \geq 3$ har vi villkoret $z \geq 0$. Vi har att $z^2 = \sqrt{x-3}$ och vi kan då skriva ekvation (9) uttryckt i variabeln z som

$$z^2 + z = \frac{15}{4}.$$

Om vi löser denna ekvation, exempelvis med hjälp av pq-formeln, får vi att $z = 3/2$ och $z = -5/2$ är lösningarna. Notera dock att även om $z = -5/2$ är en rot till andragradsekvationen, så uppfyller den inte villkoret $z \geq 0$ och kan därmed inte ge en lösning till den ursprungliga ekvationen.

Därmed återstår lösningen $z = 3/2$. Eftersom $z = \sqrt{\sqrt{x-3}}$, så har vi att $x = z^4 + 3$. Vi får att då $z = 3/2$ så gäller att

$$x = \frac{3^4}{2^4} + 3.$$

Vi kontrollerar om detta värde på x verkligen löser ekvation (9) genom att beräkna vänsterledet för detta värde på x. Vi får

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{\sqrt{x-3}} = \sqrt{\frac{3^4}{2^4}} + \sqrt{\sqrt{\frac{3^4}{2^4}}} = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4},$$

och vi har därmed funnit att ekvation (9) har den enda lösningen

$$x = \frac{3^4}{2^4} + 3 = \frac{129}{16},$$

då $x \geq 3$.

Problem 3

Problemformulering
Ida deltog i en välgörenhets-utmaning, som gick ut på att gå så långt som möjligt. För varje kilometer Ida gick donerades en fast summa pengar till en välgörenhetsorganisation. När utmaningen var klar hade därmed Ida samlat in en viss summa pengar till organisationen.

Om 20 kronor mindre hade donerats per kilometer så hade Ida behövt gå 5 kilometer längre för att samla in samma mängd pengar. Om 10 kronor mer hade donerats per kilometer så hade Ida samlat in samma mängd pengar utan att behöva gå dem sista 2 kilometerna. Hur mycket pengar lyckades Ida samla in?

Lösningsförslag
Låt m beteckna mängden pengar per kilometer som doneras och k beteckna antal kilometer som Ida har gått. Uttryckt i dessa variabler har Ida samlat in mk kronor till välgörenhetsorganisationen. Vi vet att om 20 kronor mindre hade

donerats per kilometer så hade Ida samlat in samma mängd pengar om hon gått 5 kilometer längre, d.v.s. vi har att

$$(m-20)(k+5) = mk.$$

Eftersom Ida också hade samlat in samma mängd pengar om hon gått 2 kilometer mindre och 10 kronor mer hade donerats per kilometer så gäller även att

$$(m+10)(k-2) = mk.$$

Vi sammanställer dessa ekvationer i följande ekvationssystem

$$\begin{cases} (m+10)(k-2) = mk \\ (m-20)(k+5) = mk. \end{cases}$$

Vi utvecklar parenteserna i vänsterleden och får

$$\begin{cases} mk - 2m + 10k - 20 = mk \\ mk + 5m - 20k - 100 = mk \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10k - 2m = 20 & (10) \\ 5m - 20k = 100. & (11) \end{cases}$$

Nu adderar vi två multiplar av ekvation (10) till (11) och får det ekvivalenta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 10k - 2m = 20 & (12) \\ m = 140. & (13) \end{cases}$$

vilket betyder att vi har beräknat att 140 kronor doneras per kilometer Ida går. När vi substituerar detta värde på m i ekvation (12) får vi att $k = 30$. Vi kan därmed nu beräkna att summan pengar som Ida samlat in är $mk = 140 \cdot 30 = 4200$ kronor.