Seminarium 26-06-2026

Problem 1

Problemformulering
Anna ber sin kompis Hedda att tänka på ett heltal. Anna ställer sedan följande tio frågor till Hedda om hennes tal:

- Är det delbart med 1?
- Är det delbart med 2?
- ...
- Är det delbart med 9?
- Är det delbart med 10?

Hedda svarar ”ja” på alla dessa frågor förutom en, där Hedda svarar att talet som hon tänker på och talet i Annas fråga är relativt prima. Vilken av alla dessa frågor var det Hedda besvarade på detta sätt? Vilket tal skulle Hedda kunna tänka på, till exempel?

Lösningsförslag
Hedda måste svara ”ja” på frågan om talet är delbart med 2, eftersom annars kan talet inte heller vara delbart med de andra jämna talen och därmed skulle Hedda behöva svara ”nej” på fler än en fråga. Av samma anledning måste Hedda svara ”ja” på frågan om talet är delbart med 3, i detta fall eftersom hon annars också måste svara ”nej” till om talet är delbart med 6 eller 9. Hedda kan inte heller svara ”nej” till om talet är delbart med 4 eller 5, eftersom talet då heller inte är delbart med 8, respektive 10.

Sammanfattningsvis vet vi nu att talet som Hedda tänker på är delbart med 2, 3, 4 och 5. Eftersom 2, 3, och 5 är primtal är talet även delbart med samtliga produkter av dessa primtal. Mer specifikt är talet delbart med $2 \cdot 3 = 6$ och $2 \cdot 5 = 10$. Talet är självklart även delbart med 1. Vi vet att talet är delbart med 2 och 3 och eftersom $8 = 2^3$ och $9 = 3^2$ så är talet som Hedda tänker på inte relativt primt till varken 8 eller 9. Därmed återstår enbart alternativet att Hedda svarar att talet som hon tänker på och 7 är relativt prima. Hedda skulle exempelvis kunna tänka på talet $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Problem 2

Problemformulering
Antag att du har två hinkar. Den ena hinken rymmer 5 liter och den andra hinken rymmer 7 liter. Du får enbart göra följande med hinkarna

- Fylla en tom hink med vatten
- Flytta allt vatten från ena hinken till andra hinken, men sluta om andra hinken är fylld
- Tömma en full hink på allt vatten

Målet är att en av hinkarna ska innehålla exakt 1 liter vatten. Går detta att göra och i så fall hur? Om den första hinken rymmer a liter och den andra hinken rymmer b liter, kan du hitta något villkor på a och b som gör att detta är möjligt?

Lösningsförslag
Eftersom 5 och 7 är relativt prima säger Bézouts identitet att det finns två heltal, x och y, sådana att

$$5x + 7y = 1.$$

Om vi låter $x = 3$ och $y = -2$ så uppfylls likheten eftersom

$$5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) = 1.$$

Det betyder att om vi totalt fyller 5-liters hinken 3 gånger och successivt häller över vatten i 7-liters hinken, vilken vi totalt tömmer 2 gånger, så kommer vi ha kvar 1 liter i 5-liters hinken. För att illustrera hur vi flyttar vattnet använder vi det ordnade paret (s, t), där s är mängden vatten i 5-liters hinken och t är mängden vatten i 7-liters hinken. Vi får då följande sekvens av drag

$$(0, 0) \to (5, 0) \to (0, 5) \to (5, 5) \to (3, 7).$$

Nu tömmer vi 7-liters hinken och fortsätter enligt följande

$$(3, 0) \to (0, 3) \to (5, 3) \to (1, 7) \to (1, 0),$$

och vi har därmed 1 liter kvar i 5-liters hinken.

I det generella fallet då den första hinken rymmer a liter och den andra hinken rymmer b liter gäller att om a och b är relativt prima kan vi använda Bézouts identitet. Till följd av denna kan vi få en av hinkarna att innehålla exakt 1 liter.

Problem 3

Problemformulering

Om $p < q$ är två på varandra följande udda primtal, visa att $p + q$ har minst tre primtalsfaktorer (inte nödvändigtvis olika).

Lösningsförslag

Eftersom både p och q är udda primtal, d.v.s. primtal skilda från 2, så är $p + q$ ett jämnt tal. Det betyder i sin tur att $2|p+q$, så $(p+q)/2$ är ett heltal. Notera att

$$p < \frac{p+q}{2} < q.$$

Enligt vårt antagande är p och q två på varandra följande primtal och enligt olikheten ovan är $(p+q)/2$ ett heltal mellan dessa tal. Därför kan inte $(p+q)/2$ vara ett primtal, d.v.s. det är ett sammansatt tal, som därmed har minst två primtalsfaktorer. Dessa två primtalsfaktorer är även faktorer i $p + q$. Eftersom $2|p+q$, så utgör även 2 en primtalsfaktor i $p+q$. Sammanfattningsvis har vi nu visat att $p + q$ har minst tre primtalsfaktorer.