

Utmanande matematik seminarium 2026-03-11

Mars 2026

Problem 1. Fermattal

1. Visa att inget Fermattal Fe_n är ett kvadrattal.

Lösning: Vi har $Fe_0 = 3$. För $n > 0$ visar vi att varje Fermattal ligger mellan två påvarandra följande kvadrattal och kan därmed inte vara ett kvadrattal själv, t.ex. $4 < Fe_1 = 5 < 9$ och $9 < Fe_2 = 17 < 25$. För detta ändamål noterar vi

$$\left(2^{2^{n-1}}\right)^2 = 2^{2^n} < 2^{2^n} + 1 = Fe_n < 2^{2^n} + 2 \cdot 2^{2^{n-1}} + 1^2 = \left(2^{2^{n-1}} + 1\right)^2.$$

2. Bestäm alla Fermattal Fe_n som kan framställas som en summa av två primtal.

Lösning: Anta att n är ett heltal sådan att $2^{2^n} + 1 = p + q$ för primtal p och q . Det gäller att $2^{2^n} = p + q - 1$ men notera att vänsterledet är jämnt och därmed måste högerledet också vara det. Alla primtal större än 2 är udda och det följer att $p + q - 1$ är udda om $p, q > 2$. Om säg $p = 2$ får man $q = 2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$ men detta medför att antingen $2^{2^{n-1}} - 1 = 1$ eller $2^{2^{n-1}} + 1 = 1$ och första alternativet ger $q = 3$ medan andra är omöjlig. Det enda Fermattalet som kan framställas som en summa av två primtal är därmed $3 + 2 = 5 = Fe_1$.

Problem 2. Eulers ϕ -funktion

1. Visa att $\phi(n^2) = n\phi(n)$.

Lösning: Vi har att

$$\phi(n^2) = n^2 \prod_{\substack{p|n^2, \\ p \text{ primtal}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n^2 \prod_{\substack{p|n, \\ p \text{ primtal}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n\phi(n)$$

där vi andra steget har använt att $p|n^2$ om och endast om $p|n$ enligt Aritmetikens fundamentalsats, se Sats 6.5.

2. Låt p vara ett primtal. Bestäm $\sum_{k=0}^n \phi(p^k)$.

Lösning: Enligt Aritmetikens fundamentalsats gäller det att talen med en gemensam faktor till p^k är $p, 2p, 3p, \dots, p^{k-1}p$. Notera att det finns $k - 1$ sådana element. Det följer att $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1)$ och

$$\sum_{k=0}^n \phi(p^k) = 1 + (p - 1) \sum_{k=1}^n p^{k-1} = 1 + (p - 1)(1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}) = p^n.$$

Extra: Problem 3. Primtalsfaktorisering

En gemensam multipel till två heltal är ett tal som är en multipel av vart och ett av talen, t.ex. är 24 en multipel till 6 och 8. För hur många värden på k är 12^{12} den minsta gemensamma multipel till 6^6 , 8^8 och

k ?

Lösning: Vi faktorerar och får $12^{12} = 2^{24} \cdot 3^{12}$, $6^6 = 2^6 \cdot 3^6$ och $8^8 = 2^{24}$. Notera då att detta medför $k = 2^{k_1} 3^{k_2}$ för att k är en faktor till 12^{12} . Från faktoriseringen följer det att $k_2 = 12$ då vi vi önskar at 12^{12} är den minsta multipeln. Sist, noterar vi att oavsett hur vi väljer k_1 , så länge den är mindre än 24 kommer 2^{12} vara en multipel av k . Vi har alltså 25 olika val på k_1 och därmed också k .