

# Utmanande matematik seminarium 2026-01-28

Januari 2026

## Problem 1.

Hitta det största positiva heltalet  $n$  sådant att  $(n-2)^2(n+1)$  är delbart med  $2n-1$ .

*Lösning:* Direkt division ger

$$\frac{(n-2)^2(n+1)}{2n-1} = \frac{n^3 - 2n^2 + 4}{2n-1} = \frac{1}{2}\left(n^2 - \frac{5}{2}n - \frac{5}{4} + \frac{27/8}{n-1/2}\right)$$

eller

$$\frac{8(n-2)^2(n+1)}{2n-1} = \frac{n^3 - 2n^2 + 4}{2n-1} = 4n^2 - 10n - 5 + \frac{27}{2n-1}$$

vilket ger att att största heltalet är  $n = 14$  eftersom det är största talet där  $2n-1|27$ .

**Problem 2.** Visa att talet  $\overline{abcabc}$  alltid är delbart med 7, 11 och 13.

*Lösning:* Vi har att

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2a + 10^1b + 10^0c \\ &= (10^5 + 10^2)a + (10^4 + 10^1)b + (10^3 + 10^0)c \\ &= (10^3 + 10^0)(10^2a + 10b + c).\end{aligned}$$

Notera då att  $10^3 + 10^0 = 1001$  är delbar med 7, 11, 13.

## Problem 3.

Om  $a|bc$  och  $\text{SGD}(a, b) = 1$ , visa att  $a|c$ .

*Ledtråd:* Använd Bézouts identitet

*Lösning:* Bézouts identitet ger

$$ax + by = 1$$

för heltal  $x, y$ . Multiplikation med  $c$  ger att vänsterledet är delbart med  $a$  eftersom  $a$  delar  $bc$ . Det följer att  $a$  delar  $c$ .

**Problem 4.** Visa att för varje tal  $n \geq 0$  är talet  $n^9 - 6n^7 + 9n^5 - 4n^3$  delbart med 8640.

*Lösning:* Faktorisering ger

$$n^9 - 6n^7 + 9n^5 - 4n^3 = n^3(n+1)^2(n-2)(n+2)(n-1)^2. \quad (1)$$

Det faktorerade talet är en produkt av 5 påvarandra följande heltal. Talet är därmed delbart med 5. I och med att ett tal är delbart med 3 om och endast om dess siffersumma är delbart med 3. Det kommer därför att finnas exakt två tal bland faktorerna som är delbara med 3, bland dessa kommer antingen  $(n+1)^2$  eller  $n^3$  vara delbart med  $n^3$  och det följer att hela talet är delbart med  $3^3$ . Antingen är  $n$  eller  $n+1$  delbart med 2. I båda fall följer det att hela talet är delbart med  $2^6$ . Resultatet följer då eftersom  $8640 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5$ .