Utmanande matematik seminarium 2025-11-05

November 2025

Problem 1. [Omordningsolikheten]

Antag at $a,\ b,\ c,\ d > 0$. Visa att

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq a + b + c + d.$$

Lösning: Anta en godtycklig ordning på $a, b, c, d > 0$, säg $a > d > b > c > 0$; notera att argumentet fungerar med vilken ordning som helst. Låt $x_1 = a,\ x_2 = d,\ x_3 = b$ och $x_4 = c$. Detta ger $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_3} < \frac{1}{x_4}$. Omordningsolikheten blir

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} = \frac{x_1^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \geq \frac{x_1^2}{x_1} + \frac{x_2^2}{x_2} + \frac{x_3^2}{x_3} + \frac{x_4^2}{x_4} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a + b + c + d.$$

Problem 2. [AM-GM olikheten]

1. För positiva $a,\ b$ och x, visa att

$$ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}.$$

Lösning: AM-GM ger

$$\frac{ax + \frac{b}{x}}{2} \geq \sqrt{ax\frac{b}{x}} = \sqrt{ab}.$$

2. För reella $x,\ y$ visa att

$$x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy.$$

Lösning: AM-GM ger att

$$\frac{x^4 + y^4 + 4 + 4}{4} \geq \sqrt[4]{x^4y^4 \cdot 4 \cdot 4} = 2xy.$$

3. Låt $x_i > 0$ för $i = 1, \cdots, n$. Visa att

$$(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Lösning: AM-GM ger

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

och

$$\frac{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n}\right)}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}}.$$

Kombinerat ger detta

$$(x_1 + \cdots x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \cdot n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}} = n^2.$$

Problem 3. [Cauchy-Schwarz olikhet]

1. Låt $a,\ b,\ c$ vara positiva reella tal. Visa att

$$\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\geq 1.$$

Lösning: Vi har följande omskrivning

$$\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}=\frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2bc+c^2}+\frac{a^2}{2ca+a^2}. \tag{1}$$

Cauchy-Schwarz olikheten ger

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1} x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1} y_i^2\right)$$

för reella tal x_i och y_i, $i=1,\cdots,n$. Detta medför även

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\sqrt{y_i}}{\sqrt{y_i}}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1} y_i\right).$$

Olikhet (1) blir då

$$\frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2bc+c^2}+\frac{a^2}{2ca+a^2}\geq\frac{(b+c+a)^2}{2ab+b^2+2bc+c^2+2ca+a^2}=1.$$

2. Låt $a,\ b,\ c$ vara positiva reella tal. Visa att

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\leq 1.$$

Lösning: Notera att

$$\frac{a}{2a+b}-\frac{1}{2}=\frac{-b}{2(2a+b)}$$

vilket ger

$$\frac{a}{2a+b}-\frac{1}{2}+\frac{b}{2b+c}-\frac{1}{2}+\frac{c}{2c+a}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}\left(\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\right)\leq -1/2,$$

där vi har använt olikheten från första delen. Detta ger det önskade resultatet

$$\frac{a}{2a+b}-\frac{1}{2}+\frac{b}{2b+c}-\frac{1}{2}+\frac{c}{2c+a}-\frac{1}{2}=\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}-\frac{3}{2}\leq -\frac{1}{2}.$$