

Seminarium 2025-08-12

Utmanande matematik MM1008

August Jonasson

Problem 1

Hitta det minsta positiva heltalet m sådant att

$$\binom{2n}{n}^{1/n} < m,$$

för alla positiva heltal n .

Ledning: Binomialsatsen.

Lösningsförslag

Det gäller ju att

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &< \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \dots + \binom{2n}{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \\ &= (1+1)^{2n} \\ &= 4^n.\end{aligned}$$

Alltså har vi att

$$\binom{2n}{n}^{1/n} < 4,$$

för alla positiva heltal n . Å andra sidan har vi, för $n = 5$, att

$$\binom{10}{5} = 252 > 3^5 = 243.$$

Därför blir $m = 4$ det minsta positiva heltalet sådant att olikheten gäller för alla positiva heltal n .

Problem 2

Tio barn plockade svamp i skogen. Ingen kom hem tomhänt, och tillsammans hade de samlat 54 svampar. Visa att minst två av barnen plockade samma antal svampar.

Försök hitta minst två lösningsmetoder till det här problemet.

Lösningssförslag 1

Antag att alla barn plockade olika antal svampar. Då ingen kom hem tomhänt är det minsta möjliga antalet svampar

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55,$$

vilket leder till en motsägelse. Alltså måste minst två av barnen ha plockat samma antal svampar.

Lösningssförslag 2

Varje barn plockade minst 1 svamp. De 10 minsta och olika positiva heltalen är

$$1, 2, \dots, 10,$$

vars summa blir 55. Det finns dock bara 54 svampar, så enligt lådprincipen (pigeon hole principle) måste då minst två av barnen ha plockat samma antal svampar.

Problem 3

Finns det något tiosiffrigt tal, med alla siffror olika, som är delbart med 11?

Lösningssförslag

Låt $A = \overline{abcdefghij}$ vara det tiosiffriga talet med alla siffror olika. För att A ska vara delbart med 11 måste

$$a - b + c - d + e - f + g - h + i - j = (a + c + e + g + i) - (b + d + f + h + j)$$

vara delbart med 11. Eftersom

$$\begin{aligned} (a + c + e + g + i) - (b + d + f + h + j) &= \\ (a + b + c + d + e + f + g + h + i + j) - 2(b + d + f + h + j) &= \\ 45 - 2(b + d + f + h + j) \end{aligned}$$

är ett udda tal så kan vi direkt eliminera alla jämna multiplar av 11. Vidare gäller det att

$$10 \leq (b + d + f + h + j) \leq 35,$$

vilket leder till att

$$-25 \leq 45 - 2(b + d + f + h + j) \leq 25.$$

De enda udda multiplarna av 11 i det här spannet är -11 och 11 . Studerar vi nu

$$45 - 2(b + d + f + h + j) = 11$$

så får vi att $(b + d + f + h + j) = 17$. Den här summan är möjlig att skapa genom exempelvis $(0, 1, 2, 5, 9)$ i vilken ordning vi vill, och eftersom 0 ingår här kan vi tilldela de resterande siffrorna $(3, 4, 6, 7, 8)$ till (a, c, e, g, i) i vilken ordning vi vill också. Ett exempel på ett tiosiffrigt tal, med alla siffror olika, som är delbart med 11 blir då $A = 3041627589$.