Utmanande matematik – Exempel på godkända och icke-godkända lösningar

Exempel induktion

Problem

För vilka heltal $n \geq 0$ gäller det att:

$$3n + 1 \leq n^2.$$

Godkänd Lösning

Prövning ger att olikheten ej är sann för $n < 4$, för $n = 4$ får vi $VL = 12 + 1 \leq 16 - 1 = HL$.

Induktionsbas (IB)

Prövningen ovan gav oss $n = 4$.

Induktionsantagande (IA)

Antag att $3k + 1 \leq k^2$ för något heltal $k \geq 4$.

Induktionssteg (IS)

Visa att $3(k + 1) + 1 \leq (k + 1)^2$. Vi börjar med att skriva om VL:

$$VL = 3(k+1) + 1 = 3k + 1 + 3 \leq \text{ Enligt (IA) } \leq k^2 + 3$$

Utveckling av HL ger:

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

Eftersom $k \geq 4$ är det klart att:

$$k^2 + 3 \leq k^2 + 9 \leq k^2 + 2k + 1.$$

Enligt induktionsprincipen gäller olikheten för alla heltal $n \geq 4$.

Lösning som måste kompletteras

Induktionsbas (IB)

$n = 4$

Induktionsantagande (IA)

$3k + 1 \leq k^2$

Induktionssteg (IS)

Vi ska visa att $3(k+1) + 1 \leq (k+1)^2$.

$$VL = 3(k+1) + 1 = 3k + 1 + 3 \leq k^2 + 3 \leq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = HL.$$

Problem med lösningen

En lösning får inte endast bestå av ekvationer, utan måste också underbyggas med fullständiga och sammanhängande meningar, till exempel, att induktionsbasen är $n = 4$ måste förklaras. Speciellt för induktion är att steget där induktionsantagandet används måste markeras.

Steg som inte är alltför triviala måste kompletteras med text (såklart en tolkningsfråga, men skadar inte att vara på den säkra sidan), till exempel, hur vet vi att $k^2 + 3 \leq k^2 + 2k + 1$?

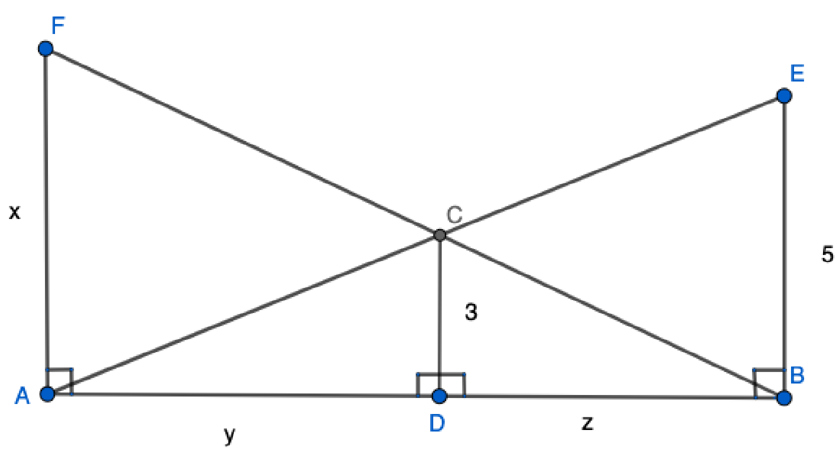
Symboler som införs måste definieras, till exempel, vad är k i lösningen?

Exempel Geometri

Betrakta fyrhörningen $ABEF$ i vilken $\angle FAB = \angle EBA = 90°$ och längden $BE = 5$. Låt C vara punkten där diagonalerna AE och FB skär varandra. Låt CD beteckna höjden i triangeln $\triangle ABC$ och antag att $CD = 3$. Bestäm längden av AF.

Exempel på en godkänd lösning

Vi börjar med att skissa en bild (detta kan göras med t.ex. GeoGebra som är ett gratisprogram som finns online) där x, y och z betecknar okända längder:



Trianglarna $\triangle AFB$ och $\triangle DCB$ delar vinkeln $\angle ABF$ och eftersom de båda dessutom har en rät vinkel måste även deras tredje vinkel överensstämma. Alltså har vi $\triangle AFB \sim \triangle DCB$. Av samma anledning gäller $\triangle EBA \sim \triangle CDA$. Sats 3.3 (Kom ihåg att alltid hänvisa till de satser som används!!) ger oss då följande ekvationer (Det är bra att namnge ekvationerna så man kan hänvisa till dem senare!)

$$\frac{5}{3} = \frac{y+z}{y} = 1 + \frac{z}{y} \tag{1}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y+z}{z} = 1 + \frac{y}{z}. \tag{2}$$

Ekvation (1) ger

$$\frac{z}{y} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \tag{3}$$

vilket medför

$$\frac{y}{z} = \frac{3}{2}. \tag{4}$$

Sätter vi in ekvation (4) i ekvation (2) får vi

$$\frac{x}{3} = 1 + \frac{3}{2} \tag{5}$$

vilket medför

$$x = 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}.$$

(Kom ihåg att använda fullständiga meningar med stor bokstav och punkt. Helst ska beräkningar och formler också ingå i en mening!) Avsluta gärna lösningen med ett tydligt fromulerat svar. Typ ”längden på AF är alltså $\frac{15}{2}$.”